

MODELISATION ET ANALYSE NUMERIQUE DE COUCHES LIMITES REACTIVES D'AIR

THESE N° 1112 (1993)

PRESENTÉE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

PAR

JEROME POUSIN

*Docteur de 3^e cycle en analyse numérique de l'Université P. et M. Curie, Paris 6
de nationalité française*

acceptée sur proposition du jury:

Prof. J. Rappaz, rapporteur
Prof. J. Blum, corapporteur
Prof. J. Descloux, corapporteur
Prof. P. Lésaint, corapporteur

Lausanne, EPFL
1993

Remerciements

Je voudrais tout d'abord témoigner ma sincère reconnaissance à Monsieur le professeur J. Rappaz de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne qui en m'accueillant dans sa chaire d'Analyse et Simulation Numériques m'a permis de mener à bien cette recherche. Je le remercie pour l'intérêt qu'il manifesta à ce travail et pour ses critiques constructives.

Je remercie vivement Monsieur le professeur J. Descloux de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne de s'être intéressé à mon travail et d'avoir accepté d'être membre du jury.

Je suis très reconnaissant envers Monsieur le professeur P. Lesaint de l'université de Besançon pour sa collaboration stimulante et pour avoir accepté d'être membre du jury.

Enfin je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur le professeur J. Blum de l'université de Grenoble pour s'être intéressé à mon travail et pour avoir accepté d'être également membre du jury.

Résumé

Le propos de ce travail concerne la simulation numérique de la couche limite réactive laminaire qui apparaît au voisinage d'un corps se déplaçant dans l'air. Nous nous sommes intéressé à la modélisation de la couche limite réactive lorsque l'hypothèse de "l'équilibre chimique" concernant les réactions chimiques se produisant dans l'air est satisfaite, et lorsque les vitesses des réactions chimiques sont finies. Nous nous sommes aussi intéressé à l'étude mathématique de problèmes simplifiés issus de la modélisation de la couche limite réactive.

Nous rappelons la méthode pour établir les équations de conservation qui sont écrites pour les dix fonctions représentant les cinq espèces chimiques constituant l'air, la densité moyenne de l'air, la température de l'air, la vitesse moyenne et la pression.

Nous considérons ensuite les réactions chimiques qui se produisent dans l'air, et nous proposons un modèle pour les termes de production des espèces chimiques. Dans le cas où l'hypothèse de "l'équilibre chimique" est satisfaite, nous étudions la régularité des fonctions représentant les fractions massiques des espèces chimiques. Finalement, nous établissons une relation qui permet de considérer la fonction d'enthalpie libre comme une fonction de Lyapounov pour les équations de conservation des espèces lorsque la diffusion des espèces chimiques est négligée.

Les équations de la couche limite réactive sont des équations aux dérivées partielles paraboliques semi-linéaires qui dégénèrent sur le bord du domaine qui correspond au corps qui se déplace. En considérant des problèmes simplifiés déduits des équations de la couche limite réactive, nous étudions le type de dégénérescence qui apparaît dans ces équations et nous établissons des résultats de convergence et des estimations d'erreur pour l'approximation de ces problèmes par des méthodes de différences finies.

Dans le cas où la diffusion des espèces chimiques est négligée, nous nous sommes aussi intéressés au comportement asymptotique des fonctions représentant les fractions massiques des espèces chimiques lorsque l'on s'approche du corps.

Pour finir, nous proposons un algorithme pour approcher numériquement les équations de la couche limite laminaire réactive.

Abstract

The objective of this work is the numerical simulation of the reactive laminar boundary layer which occurs in a neighbourhood of a body moving in the air. We have investigated the modelling of the reactive boundary layer when, the "chemical equilibrium" hypothesis concerning the chemical reactions occurring in the air is satisfied, and when the chemical reaction rates are finite. We have made a mathematical study of the simplified problems coming from the modelling of the reactive boundary layer.

We recall the method to state the conservation equations which are written for the ten functions representing the five mass fractions of the chemical species constituting the air, the mean density of the air, the temperature of the air, the mean velocity and the pressure.

Then we consider the chemical reactions occurring in the air, and we propose a model for the production terms of the chemical species. In the case where the "chemical equilibrium" is satisfied, we investigate the regularity of the functions representing the mass fractions of the chemical species. Finally, we state a relation which allows us to consider the free enthalpy function as a Lyapounov's function for the equations of conservation of the species when the species diffusion is neglected.

The reactive boundary layer equations are semi-linear partial differential equations of parabolic type which degenerate on the part of the boundary of the domain corresponding to the moving body. When considering simplified problems derived from the reactive boundary layer equations, we investigate the type of degeneration taking place in these equations and we state convergence results and error estimates for the approximation of these problems with finite difference methods.

In the case where the diffusion of the chemical species is neglected, we have investigated the asymptotic behavior of the functions representing the mass fractions of the species when approaching the body.

Finally, we propose an algorithm to compute numerically the reactive boundary layer equations.

TABLE DES MATIERES

0.	Introduction	1
1.	Modèle physique et équations traitées	7
	1.1 Introduction	8
	1.2 Relations thermodynamiques	13
	1.3 Relations de transport	14
	1.4 Hypothèses de la couche limite	15
2.	Quelques propriétés thermodynamiques de l'air	21
	2.0 Introduction	22
	2.1 Espace des réactions chimiques, matrice stoechiométrique	28
	2.2 Quelques propriétés de la fonction d'enthalpie libre	31
	2.3 Equilibre chimique	35
	2.4 Une inégalité de stabilité	41
3.	Estimations d'erreur pour un problème parabolique non linéaire dégénéré	51
	3.1 Introduction	52
	3.2 Existence et unicité de solutions au problème continu P	54
	3.3 Schéma numérique, majorations d'erreur	71
	3.4 Algorithme pour calculer la solution du problème discret P_h^r	86
	3.5 Quelques remarques et généralisations	91
	Annexe 1. Régularisation d'une fonction	97
	Annexe 2. Estimation de la dérivée en espace de la solution d'un problème parabolique	100
4.	Résultats d'existence et d'approximation pour un problème de couche limite thermique	105
	4.1 Introduction	106
	4.2 Définition d'une solution faible du problème P et unicité	109
	4.3 Existence, unicité et estimations a priori pour la solution approchée	116
	4.4 Convergence de la solution approchée lorsque h et τ tendent vers zéro	133
	Annexe 1. Un problème linéaire parabolique dégénéré	143

5.	Comportement asymptotique des fractions massiques au voisinage du corps	153
5.1	<i>Introduction</i>	154
5.2	<i>Existence et unicité de solutions au problème P</i>	157
5.3	<i>Comportement asymptotique dans un voisinage de Σ_0</i>	169
6.	Méthode numérique	177
6.1	<i>Introduction</i>	178
6.2	<i>Conditions initiales</i>	185
6.3	<i>Algorithme pour résoudre les équations de la couche limite à l'équilibre</i>	188
6.4	<i>Algorithme pour résoudre les équations de la couche limite hors équilibre</i>	193
6.5	<i>Quelques résultats numériques</i>	199

PRINCIPALES NOTATIONS UTILISEES

Principales notations mathématiques utilisées.

Dans ce qui suit, I désigne un intervalle ouvert de \mathbf{R} , Q un domaine de \mathbf{R}^2 et Q_T le domaine défini par:

$$Q_T \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, t) \in (0, 1) \times (0, T)\}.$$

On désignera par α un nombre réel tel que: $0 < \alpha < 1$, par p un nombre réel tel que $1 \leq p < +\infty$, et nous noterons X un espace de Banach réel quelconque.

- $C^j(I)$: ensemble des fonctions définies sur I à valeurs réelles j fois continûment différentiables (i.e de classe C^j).
- $C^j(\bar{I})$: ensemble des fonctions de $C^j(I)$ telles que leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à j admettent une extension continue à \bar{I} . la norme de $C^j(\bar{I})$ est donnée par: $\|\varphi\|_{C^j(\bar{I})} = \sup_{x \in \bar{I}} \sum_{l=0}^j |\varphi^{(l)}(x)|$.
- $C^j(\bar{I}; X)$: ensemble des fonctions définies sur \bar{I} à valeurs dans X j fois continûment différentiables telles que leurs dérivées d'ordre $l \leq j$ admettent une extension continue à \bar{I} . la norme de $C^j(\bar{I}; X)$ est donnée par: $\|\varphi\|_{C^j(\bar{I}; X)} = \sum_{l=0}^j \sup_{x \in \bar{I}} \|\varphi^{(l)}(x)\|_X$.
- $C^{2,1}(Q_T)$: ensembles des fonctions définies sur Q_T à valeurs réelles deux fois continûment différentiables par rapport à la variable x et une fois continûment différentiable par rapport à la variable t .
- $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$: ensembles des fonctions de $C^{2,1}(Q_T)$ telles que leurs dérivées admettent une extension continue à \bar{Q}_T .
- $C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$: ensembles des fonctions de $C^{2,1}(Q_T)$ telles que la deuxième dérivée par rapport à la variable x soit Hölderienne d'ordre α et la première dérivée par rapport à la variable t soit Hölderienne d'ordre $\frac{\alpha}{2}$.
- $D(I)$: ensemble des fonctions $C^\infty(I)$ à support compact.
- $D'(I)$: ensemble des distributions sur I à valeurs réelles.
- $D'(I; X)$: ensemble des distributions vectorielles sur I à valeurs dans X .

$L^p(Q)$:	ensemble des (classes de) fonctions mesurables sur Q à valeurs réelles de puissance $p^{i\text{ème}}$ sommable. Pour $p = +\infty$ on remplace de puissance $p^{i\text{ème}}$ sommable par essentiellement bornées.
$L^p(I; X)$:	ensemble (des classes) de fonctions de I à valeurs dans X , mesurables pour la mesure de Lebesgue telles que la puissance $p^{i\text{ème}}$ de leur norme dans X soit sommable. La norme de $L^p(I; X)$ est donnée par: $\ \varphi\ _{L^p(I; X)}^p = \int_I \ \varphi(x)\ _X^p dx$
$H^1(I)$:	ensemble des fonctions de $L^2(I)$ telles que leur dérivée au sens des distributions appartient à $L^2(I)$. La norme de $H^1(I)$ est donnée par: $\ \varphi\ _{H^1(I)}^2 = \ \varphi\ _{L^2(I)}^2 + \ \varphi'\ _{L^2(I)}^2$.
$H_0^1(I)$:	ensemble des fonctions de $H^1(I)$ nulles aux extrémités de l'intervalle I . La norme de $H_0^1(I)$ est donnée par: $\ \varphi\ _{H_0^1(I)}^2 = \ \varphi'\ _{L^2(I)}^2$.
$H^1(Q_T)$:	ensemble des fonctions de $L^2(Q_T)$ telles que leur gradient au sens des distributions appartient à $L^2(Q_T)$. La norme de $H^1(Q_T)$ est donnée par: $\ \varphi\ _{H^1(Q_T)}^2 = \ \varphi\ _{L^2(Q_T)}^2 + \ \varphi'\ _{L^2(Q_T)}^2$.
$W^{1,p}(I)$:	ensemble des fonctions de $L^p(I)$ telles que leur dérivée au sens des distributions appartient à $L^p(I)$. La norme de $W^{1,p}(I)$ est donnée par: $\ \varphi\ _{W^{1,p}(I)}^p = \ \varphi\ _{L^p(I)}^p + \ \varphi'\ _{L^p(I)}^p$.
$H^2(I)$:	ensemble des fonctions de $H^1(I)$ telles que leur dérivée seconde au sens des distributions appartient à $L^2(I)$. La norme de $H^2(I)$ est donnée par: $\ \varphi\ _{H^2(I)}^2 = \ \varphi\ _{H^1(I)}^2 + \ \varphi''\ _{L^2(I)}^2$.
$W^{1,p}(I; X)$:	ensemble des fonctions de $L^p(I; X)$: telles que leur dérivé au sens des distributions appartient à $L^p(I; X)$. La norme de $W^{1,p}(I; X)$ est donnée par: $\ \varphi\ _{W^{1,p}(I)}^p = \ \varphi\ _{L^p(I; X)}^p + \ \varphi'\ _{L^p(I; X)}^p$.
$\partial\mathbb{R}_+^N$:	bord de \mathbb{R}_+^N .
f'	dérivée de la fonction réelle d'une variable réelle f .
$f^{(l)}$	dérivée d'ordre l de la fonction réelle d'une variable réelle f .
$\frac{\partial^j}{\partial x^j}$:	dérivée partielle d'ordre j par rapport à la variable x .
f_{x^j} :	dérivée partielle de f d'ordre j par rapport à la variable x .
∇f :	gradient de la fonction f par rapport à la variable x .

∂_Z *dérivée partielle par rapport à la variable Z .*

$\text{Ker } A$: *noyau de l'application A .*

$\text{span}(\vec{x})$: *espace vectoriel engendré par le vecteur \vec{x} .*

Principales notations physiques utilisées.

A^z :	matrice stoechiométrique.
C_p :	chaleur spécifique à pression constante.
C_{p_k} :	chaleur spécifique à pression constante de l'espèce chimique k .
g^Z :	enthalpie libre.
h :	enthalpie massique.
h_k :	enthalpie massique de l'espèce chimique k .
\vec{M} :	vecteur des masses partielles.
M_k :	masse de l'espèce chimique k .
N :	azote sous forme atomique.
N_2 :	molécule d'azote.
NO :	monoxyde d'azote.
O :	oxygène sous forme atomique.
O_2 :	molécule d'oxygène.
P :	pression.
P_k :	pression de l'espèce chimique k .
R_0 :	constante universelle des gaz.
T :	température.
$\vec{V} = (u, v)^T$:	vitesse de l'écoulement.
$\vec{V}_k = (V_{k_1}, V_{k_2})^T$:	vitesse de l'espèce chimique k .
$\vec{v}_k = (v_{k_1}, v_{k_2})^T$:	vitesse de diffusion de l'espèce chimique k .
W :	masse molaire du mélange.

W_k :	masse molaire de l'espèce chimique k .
\vec{Y} :	vecteur des fractions massiques des espèces chimiques.
ρ :	densité massique du fluide multicomposant.
ρ_k :	densité massique de l'espèce chimique k du fluide multicomposant.
σ^V :	tenseur visqueux des tensions du fluide multicomposant.
σ_k^V :	tenseur visqueux des tensions de l'espèce chimique k .
σ^D :	tenseur des contraintes de diffusion.
σ_k^D :	tenseur des contraintes de diffusion de l'espèce chimique k .
μ	viscosité du fluide multicomposants.
μ_k	viscosité de l'espèce chimique k .
$\vec{\mu}^z$:	vecteur des potentiels chimiques.
λ :	diffusivité thermique du fluide multicomposant.
λ_k :	diffusivité thermique de l'espèce chimique k .
Π :	tenseur des contraintes visqueuses.
Π_k :	tenseur des contraintes visqueuses de l'espèce chimique k .
ν_k^\pm :	coefficients stœchiométriques.

Introduction

Lorsque l'on s'intéresse à la description de l'écoulement de l'air autour d'un corps (avion, navette spatiale,...), il est nécessaire de considérer l'écoulement du point de vue dynamique, c'est-à-dire de décrire la vitesse, la quantité de mouvement, etc..., mais encore du point de vue de ses propriétés intrinsèques telles que sa température, sa pression, sa viscosité, sa conductivité thermique, etc., et bien sûr il est nécessaire de considérer la masse des diverses espèces chimiques le constituant. Dans le cas de l'air, une description réaliste semble être fournie par les équations d'Euler associées aux lois de la thermodynamique classique, à l'exception toutefois d'une région située au voisinage du corps où les effets de la diffusion visqueuse peuvent être négligés dans la direction principale de l'écoulement, mais pas dans la direction normale au corps. Les effets dus à la viscosité sont importants dans la pratique puisqu'ils induisent des forces de frottement qui modifient la distribution de pression sur le corps et par conséquent la traînée. Ils participent aussi à l'échauffement du corps.

Les équations d'Euler négligent la diffusion visqueuse, c'est pourquoi elles ne sont pas pertinentes au voisinage du corps.

Historiquement, l'étude d'un écoulement d'air au dessus d'une plaque plane fut le premier exemple considéré par Blasius (voir [4]) pour illustrer la théorie de la couche limite de Prandtl (voir [12]) qui avait pour but d'introduire les effets visqueux au voisinage du corps dans la direction normale au corps.

Blasius utilisa une méthode dite de solutions similaires pour résoudre les équations de la couche limite laminaire, incompressible en régime subsonique. L'idée d'une telle méthode est d'introduire d'une part, la fonction de courant ψ de l'écoulement afin d'exprimer les composantes de la vitesse avec celle-ci, soit $\vec{V} = \text{rot} \psi$, ainsi la condition d'incompressibilité $\text{div} \vec{V} = 0$ est-elle automatiquement satisfaite. D'autre part, on considère un changement de variables liant les variables indépendantes x et y du type: $\eta \stackrel{\text{dét}}{=} y \sqrt{\frac{U_\infty}{2\mu x}}$, et on cherche alors ψ sous la forme: $\psi = \sqrt{2\mu x U_\infty} f(\eta)$. La quantité U_∞ représente la vitesse à l'infini amont et μ la viscosité de l'air. Un calcul simple montre que la fonction f est solution d'une équation différentielle ordinaire non linéaire.

D'autres transformations furent introduites par la suite, par exemple la transformation de Dorodnitsyn (voir [5]), qui fournit dans certaines situations des solutions similaires pour des écoulements compressibles. De telles méthodes permirent aussi d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité pour des écoulements incompressibles dans des situations bidimensionnelles (voir Oleinik [10], [11]) ou tridimensionnelles (voir Walter [15]). Mentionnons l'ouvrage de Schlichting [13] et les références qui s'y trouvent pour l'étude de la couche limite incompressible. En outre, citons les travaux de Aupoix-Coustex (voir [2]), Aupoix (voir [3]) et Edelm (voir [6]) où des méthodes de type intégrales sont utilisées pour étudier numériquement la couche limite compressible laminaire.

Dans ce travail, nous avons comme parti pris de ne pas introduire de telles transformations ni des transformations des coordonnées pour discrétiser les équations. Ce choix est justifié

par un souci d'approcher les quantités physiques qui intéressent l'ingénieur dans la pratique. De même, l'écoulement étant suffisamment complexe dans une description minimale (composition chimique, réactions à considérer,...), nous nous sommes attaché à utiliser des méthodes de discrétisation simples.

Lorsque le corps se déplace à très grande vitesse, l'énergie cinétique est très importante. L'énergie se conserve sur la ligne de courant aboutissant au point de stagnation (appelée ligne de stagnation); la vitesse s'annule sur le corps, il s'ensuit que l'énergie interne est importante, et la température est donc élevée. Il n'est alors plus possible de négliger les réactions chimiques qui se produisent.

En résumé, cette analyse très succincte révèle que pour un écoulement de densité raisonnable (permettant de considérer le milieu comme un continuum), lorsque le nombre de Mach devient important, nous devons traiter l'écoulement autour du corps comme un écoulement de fluide chimiquement réactif puisque les températures sont très élevées. Pour une description de ces phénomènes du point de vue de l'ingénieur, le lecteur pourra consulter Anderson [1] et les références qui y sont citées.

Lorsque l'on étudie des écoulements de fluides chimiquement réactifs, il est traditionnel de distinguer principalement deux catégories: les fluides dits à l'équilibre chimique et les fluides dits hors équilibre chimique (pour une définition précise se reporter par exemple à Anderson [1], Kuo [8], Williams [16] ou au chapitre 2). Sans entrer dans le détail, un fluide chimiquement réactif est dit à l'équilibre si les vitesses des réactions chimiques qui se produisent sont beaucoup plus importantes que la vitesse moyenne des espèces, c'est-à-dire la vitesse de l'écoulement. Par exemple, dans une couche limite se développant autour d'un corps se déplaçant à grande vitesse (vitesse hypersonique), au voisinage de la ligne de stagnation, on peut considérer que le fluide chimiquement réactif est à l'équilibre chimique puisque la vitesse est petite, par contre, ailleurs dans la couche limite, cette hypothèse de chimie à l'équilibre ne sera plus vérifiée. Evidemment, un fluide chimiquement réactif hors équilibre est un fluide pour lequel les vitesses des réactions chimiques sont du même ordre de grandeur que la vitesse de l'écoulement.

La nécessité de modéliser la réactivité chimique de l'air pour des objets se déplaçant à des vitesses hypersoniques est donc évidente, de plus, si on a la prétention d'obtenir quelques résultats prédictifs pour la température au voisinage du corps, négliger les réactions chimiques revient systématiquement à surestimer la température. En effet, la plupart des réactions chimiques se produisant entre les composants chimiques de l'air à des températures élevées sont des réactions de dissociation des molécules lourdes, donc des réactions endothermiques.

Dans ce travail, par souci de clarté, nous nous placerons souvent dans un contexte où la géométrie des objets est plane.

Tout d'abord, nous rappelons les équations générales de conservation pour des écoulements de fluides chimiquement réactifs, et nous décrivons rapidement la méthode asymptotique

permettant d'en déduire les équations dites de la couche limite. Ceci est l'objet du chapitre 1.

Au chapitre 2, nous donnons quelques propriétés thermodynamiques de l'air, nous décrivons les termes de production des espèces chimiques et nous donnons une définition de l'équilibre chimique. De plus, nous établissons un résultat de régularité par rapport à la pression et la température pour les fonctions représentant les concentrations massiques des espèces chimiques à l'équilibre. Ce résultat sera utilisé aux chapitres 4 et 5 lorsque l'équilibre chimique sera considéré.

Nous établissons encore une inégalité, que nous appelons inégalité de stabilité, et qui au chapitre 5 nous permettra d'étudier le comportement asymptotique des fractions massiques lorsque l'on s'approche du corps et ceci en l'absence de diffusion des espèces chimiques.

Le chapitre 3, quant à lui, est consacré à l'étude d'une méthode numérique que nous utilisons pour résoudre les équations que satisfont les composantes de la vitesse. Une estimation d'erreur est établie pour un problème modèle dégénérant sur un bord du domaine. Il est à noter que nous n'utilisons pas de problème approché régularisé pour obtenir cette estimation d'erreur.

Au chapitre 4, nous étudions l'existence et l'unicité de la fonction représentant la température dans la couche limite thermique à l'équilibre chimique, lorsque les valeurs des composantes de la vitesse sont connues. Il est à noter que la méthode que nous employons est une méthode constructive qui fonde la stratégie de l'algorithme que nous utiliserons au chapitre 6 pour résoudre numériquement l'ensemble des équations. Bien évidemment, ce n'est pas la seule méthode pour obtenir l'existence de la fonction représentant la température, nous aurions pu, par exemple, utiliser un théorème de Leray-Schauder dans des espaces fonctionnels appropriés. On pourra consulter à ce sujet Ladyzenskaya-Solonnikov-Uralceva [9] ou Friedman [7].

Au chapitre 5, nous nous intéressons au comportement asymptotique des fractions massiques des espèces chimiques constituant le fluide lorsque l'on s'approche du corps. Le résultat que nous obtenons est le suivant: en l'absence de diffusion des espèces chimiques, les fractions massiques des espèces tendent vers leurs valeurs d'équilibre lorsque l'on s'approche du corps.

Finalement au chapitre 6, nous décrivons un algorithme pour résoudre numériquement les équations de la couche limite réactive se fondant sur une méthode de marche. Nous montrons que pour chaque pas en espace le problème approché des équations de la chimie hors équilibre est un problème bien posé.

Mentionnons les travaux de Sawley-Vos-Wüthrich [14] dans lesquels on trouvera une méthode numérique qui semble proche de la nôtre pour résoudre les équations de la couche limite réactive.

Pour conclure cette introduction, résumons les principaux résultats que nous avons obtenus et mentionnons le sujet commun aux divers problèmes étudiés. Les équations de la couche

limite thermique, de la couche limite visqueuse, de la couche limite chimique sont des équations non linéaires qui dégèrent sur le bord du domaine qui correspond au corps qui se déplace. Dans ce travail, nous avons eu comme constante préoccupation de comprendre et d'analyser les conséquences de cette dégénérescence. Les quatre premiers chapitres, du chapitre 2 au chapitre 5, outre l'intérêt intrinsèque des résultats qui y sont présentés, justifient d'une certaine manière la méthode numérique décrite au chapitre 6. Néanmoins la démonstration de la convergence de cette méthode pour le problème général reste à notre connaissance un problème ouvert.

Remarquons que très peu de travaux sont consacrés à l'analyse numérique des couches limites réactives, et qu'il existe donc peu de résultats concernant la convergence et les estimations d'erreur pour ces problèmes de couches limites réactives.

Nous avons montré dans ce travail que bien que les équations traitées soient dégénérées, le type de dégénérescence n'interdisait pas d'obtenir des résultats de convergence ni même des estimations d'erreur (voir chapitres 4 et 5) sans faire intervenir de problèmes régularisés.

Par ailleurs, dégageant un ensemble simple de propriétés (thermodynamiques, signe du terme de production des espèces lorsque l'une d'entre elles s'annule,...), nous avons montré qu'en l'absence de diffusion des espèces chimiques, les équations de la "chimie" peuvent être résolues numériquement par des méthodes simples.

Puis au travers de quelques exemples numériques présentés au chapitre 6, nous espérons avoir montré que la méthode numérique que nous proposons est efficace dans de nombreux cas.

Evidemment, ce travail devrait se poursuivre afin de prendre en compte la diffusion des espèces chimiques constituant le fluide chimiquement réactif. En effet, tout au long de ce travail nous avons négligé la diffusion chimique ne considérant pas les situations où celle-ci est importante.

Nous ne saurions manquer de mentionner qu'une grande partie de ce travail a été réalisée lors d'un contrat Hermès entre d'une part l'IMHEF, la chaire d'Analyse numérique, et d'autre part l'ESA, et qu'une partie des résultats que nous présentons a été obtenue en collaboration avec P. Lesaint de l'Université de Besançon et E. Boillat de l'Ecole polytechnique Fédérale de Lausanne.

REFERENCES

1. Anderson, J.D., *Hypersonic and high temperature gas dynamics, series in aeronautical and aerospace engineering*, Mc Graw-Hill, 1989.
2. Aupoix B., Cousteix J., *Calculations of hypersonic laminar boundary layers*. (1987), First joint Europe-US course on hypersonics, Paris.
3. Aupoix B., *Introduction to real gas effects*. (1988), AGARD-FDF-VKI special course on Aerothermodynamics of hypersonic vehicles..
4. Blasius H., *Grenzschichten in flüssigkeiten mit reibung*, Z. Math. Phys. 56 (1908).
5. Dorodnitsyn A. A., *Laminar boundary layer in compressible fluid*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 34 (1942).
6. Edelm C., *Couches limites hypersoniques avec effet de dissociation* (1987), Thèse de l'école nationale sup. de l'aéronautique et de l'espace, Toulouse.
7. Friedman A., *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice Hall, London, 1960.

8. Kuo K., *Principles of combustion*, John Wiley-Sons, 1986.
9. Ladyzenskaya, Solonnikov, Uralceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type.*, vol. 23, Trans. of Math. monographs, Rhode Island, 1968.
10. Oleinik O.A., *The Prandtl system of equations in boundary layer theory*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR Soviet Math. **159** (1963), 583-586.
11. ———, *Mathematical problems of boundary layer theory*, Lecture Notes of university of Minnesota, University of Minnesota Minneapolis.
12. Prandtl H., *Über flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner reibung*, Proc. III Intern. Math. Cong. (1904), Heidelberg.
13. Schlichting H., *Boundary layer theory.*, MacGraw-Hill, New York, 1979.
14. Sawley M. L., Vos J. B., Wüthrich S., *Modelization and calculation of laminar hypersonic boundary layer flows*, Inter. Conf. on Hypersonic Aerodynamics (1989), Manchester.
15. Walter W., *Existence and convergence theorems for the boundary layer equations based on the line method.*, Arch. Ratio. Mech. Anal. **39** (1970), 169-188.
16. Williams F. A., *Combustion theory*, Benjamin-Cumming, 1985.

CHAPITRE 1

Modèle physique et équations traitées

Résumé.

Dans ce chapitre, nous rappelons la marche à suivre pour obtenir le modèle physique classique décrivant les écoulements stationnaires de fluides multicomposants chimiquement réactifs. Nous obtenons ainsi les équations de conservation. Nous rappelons ensuite les relations thermodynamiques et les relations de transport. Ces expressions sont particularisées pour les cas qui nous intéressent. Finalement nous présentons l'analyse asymptotique formelle qui nous permet d'établir les équations de la couche limite laminaire chimiquement réactive dans le cas d'une plaque plane.

1.1. Introduction.

Les équations de bilan pour un fluide multicomposant réactif expriment la conservation de la masse totale, de la masse de chacun de ses constituants, de l'impulsion, et de l'énergie. Ces équations s'obtiennent en supposant que chacun des composants obéit aux lois de la thermodynamique et de la dynamique, et que le milieu est continu. La méthode mathématique pour établir ces équations de bilan est maintenant classique. Elle consiste à écrire les relations de conservation pour chaque espèce et à en faire la somme pour toutes les espèces. On pourra consulter à ce sujet Williams [5] chapitre 1 et annexe C, Kuo [3] ou Anderson [1], par exemple.

Soit un écoulement bidimensionnel stationnaire et laminaire de fluide réactif constitué de N espèces chimiques. Les équations de bilan sont écrites pour les $N+5$ fonctions suivantes: les fractions massiques des espèces constituant le fluide $\{Y_k\}_{k=1}^N$; la densité massique moyenne du fluide ρ ; la température T ; les composantes $(u, v)^T$ de la vitesse moyenne \vec{V} dans le repère Cartésien (\vec{e}_x, \vec{e}_y) et la pression P . Si on note ρ_k , $\vec{V}_k = (V_{k1}, V_{k2})^T$ la densité massique, respectivement la vitesse de l'espèce k pour $k = 1, \dots, N$, alors les relations suivantes sont vérifiées:

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^N \rho_k; \quad \vec{V} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^N \rho_k \vec{V}_k; \quad \rho Y_k \stackrel{\text{def}}{=} \rho_k. \quad (1.1.1)$$

Remarque.

Les relations (1.1.1) impliquent

$$\sum_{k=1}^N Y_k = 1.$$

Considérons l'évolution de la masse de l'espèce k . Soit τ_k un volume de contrôle arbitraire qui se déplace à la vitesse \vec{V}_k , nous désignons par M_k la masse de l'espèce k contenue dans ce volume arbitraire. Pour tout temps t nous avons trivialement:

$$M_k = \int_{\tau_k} \rho_k d\tau.$$

La variation de M_k par rapport au temps s'obtient en différentiant par rapport au temps l'équation précédente, soit:

$$\frac{d}{dt} M_k = \frac{d}{dt} \int_{\tau_k} \rho_k d\tau.$$

Pour calculer le membre de droite de cette égalité on exprime $\tau_k(t)$ en fonction de $\tau_k(0)$, puis on utilise la formule de changement de variables pour les intégrales multiples. Il est alors licite de permuter le signe somme et la différentielle. Il vient (cf [5] annexe C):

$$\frac{d}{dt} M_k = \int_{\tau_k} (\partial_t \rho_k + \text{div}(\rho_k \vec{V}_k)) d\tau.$$

Soit ω_k la masse de l'espèce k produite par unité de temps et par unité de volume, on a :

$$\frac{d}{dt} M_k = \int_{\tau_k} \omega_k d\tau;$$

ce qui, pour tout temps t , conduit à l'égalité :

$$\int_{\tau_k} [\partial_t \rho_k + \operatorname{div}(\rho_k \vec{V}_k) - \omega_k] d\tau = 0.$$

Au temps t on a $\tau_k = \tau$ volume que l'on peut choisir arbitrairement, la relation précédente se transforme en :

$$\partial_t \rho_k + \operatorname{div}(\rho_k \vec{V}_k) - \omega_k = 0.$$

Si de plus on suppose le phénomène stationnaire, cette dernière égalité devient :

$$\operatorname{div}(\rho_k \vec{V}_k) = \omega_k.$$

Dans ce qui suit, nous ne nous intéressons qu'à l'état stationnaire.

Utilisant les relations (1.1.1) et la propriété de conservation globale de la masse, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^N \omega_k = 0$, d'une part en sommant sur les espèces la relation précédente nous exprimons la la conservation de la masse totale par l'équation :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0. \quad (1.1.2)$$

D'autre part, de la relation donnant la variation de la masse M_k , en utilisant les relations (1.1.1) et l'équation (1.1.2) on obtient l'équation de conservation de la masse des espèces chimiques :

$$\rho \vec{V}^T \nabla Y_k = \omega_k - \operatorname{div}(\rho Y_k \vec{v}_k); \text{ pour } k = 1, \dots, N, \quad (1.1.3)$$

où \vec{v}_k est la vitesse de diffusion de l'espèce k qui est définie par :

$$\begin{aligned} \vec{v}_k &= (v_{k_1}, v_{k_2})^T \stackrel{\text{def}}{=} \vec{V}_k - \vec{V}; \\ \text{et on a : } \sum_{k=1}^N \rho_k \vec{v}_k &= \vec{0}, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

où le symbole T désigne la transposition. Nous définissons P , la pression totale à partir des pressions partielles P_k de chaque espèce k par la loi de Dalton :

$$P = \sum_{k=1}^N P_k. \quad (1.1.5)$$

La même démarche permet d'établir la conservation de l'impulsion et de l'énergie que nous rappelons dans ce qui suit.

Conservation de l'impulsion.

Nous notons σ_k^V le tenseur des tensions de l'espèce k . La conservation de l'impulsion pour l'espèce k s'écrit:

$$\operatorname{div}(\rho_k \vec{V}_k V_{k_1}) = -\operatorname{div}(\vec{\sigma}_{k_1}^V) + f_{k_1}; \quad (1.1.6)$$

$$\operatorname{div}(\rho_k \vec{V}_k V_{k_2}) = -\operatorname{div}(\vec{\sigma}_{k_2}^V) + f_{k_2}; \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.1.7)$$

$$\text{où } \vec{\sigma}_{k_i}^V \stackrel{\text{déf}}{=} (\sigma_{k_{i1}}^V, \sigma_{k_{i2}}^V)^\top, \quad i = 1, 2 \text{ et } \sigma_k^V = P_k I + \Pi_k,$$

où Π_k dénote le tenseur des contraintes visqueuses. La quantité \vec{f}_k représente la force volumique due aux sollicitations des volumes matériels des autres espèces sur l'espèce k produite. Nous ne décrivons pas les \vec{f}_k puisque le principe de l'action et de la réaction implique:

$$\sum_{k=1}^N \vec{f}_k = 0,$$

ce qui permet d'éliminer les \vec{f}_k lorsque l'on considère les grandeurs moyennes.

Utilisant la première relation de (1.1.4) et sommant sur les espèce k les équations (1.1.6), (1.1.7), il vient:

$$\operatorname{div}\left(\sum_{k=1}^N \rho_k \vec{V}_k u + \sum_{k=1}^N \rho_k \vec{v}_k v_{k_1}\right) = -\operatorname{div}\left(\sum_{k=1}^N \vec{\sigma}_{k_1}^V\right); \quad (1.1.8)$$

$$\operatorname{div}\left(\sum_{k=1}^N \rho_k \vec{V}_k v + \sum_{k=1}^N \rho_k \vec{v}_k v_{k_2}\right) = -\operatorname{div}\left(\sum_{k=1}^N \vec{\sigma}_{k_2}^V\right). \quad (1.1.9)$$

Définissant le tenseur des contraintes de diffusion σ^D par:

$$\sigma_{ij}^D \stackrel{\text{déf}}{=} \rho \sum_{k=1}^N Y_k v_{k_i} v_{k_j} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^N \sigma_{k_{ij}}^D, \quad 1 \leq i, j \leq 2, \quad (1.1.10)$$

et les tenseurs des contraintes visqueuses Π et des tensions σ^V par:

$$\Pi = \sum_{k=1}^N \Pi_k, \quad \sigma^V = \sum_{k=1}^N \sigma_k^V, \quad (1.1.11)$$

on a en tenant compte de la relation (1.1.1):

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V} u) + \operatorname{div}(\vec{\sigma}_1^D) = -\operatorname{div}(\vec{\sigma}_1^V); \quad (1.1.12)$$

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V} v) + \operatorname{div}(\vec{\sigma}_2^D) = -\operatorname{div}(\vec{\sigma}_2^V). \quad (1.1.13)$$

Finalement la relation (1.1.2) implique:

$$\rho(\vec{V}^\top \nabla) \vec{V} = -\text{div}(\sigma^V + \sigma^D). \quad (1.1.14)$$

Les tenseurs Π et σ^V ont pour expression:

$$\begin{aligned} \Pi &= (\text{div}(\vec{V}) \frac{2}{3} \mu) I - \mu(\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^\top) \\ \sigma^V &= P + \Pi = (P + \text{div}(\vec{V}) \frac{2}{3} \mu) I - \mu(\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^\top), \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

μ désignant la viscosité du mélange, et P la pression définie par la relation (1.1.5).

Conservation de l'énergie.

Nous présentons l'équation de conservation de l'énergie dans un formalisme adapté aux simplifications ultérieures que nous serons amenés à faire dans le cadre de la théorie de la couche limite.

Soit e_k , \vec{q}_k respectivement l'énergie interne et le flux de chaleur de l'espèce k , pour $k = 1, \dots, N$. Nous définissons l'énergie interne e et le flux de chaleur \vec{q} du fluide par:

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^N Y_k e_k; \quad \vec{q} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^N \vec{q}_k. \quad (1.1.16)$$

La conservation de l'énergie exprime que le taux de variation par unité de volume et de temps de l'énergie est égal à la somme de l'énergie apportée sous forme de chaleur, de l'énergie apportée par les travaux des forces visqueuses et de l'énergie apportée par la production de masse de l'espèce considérée. Dans le cas stationnaire, pour l'espèce k la conservation de l'énergie s'écrit:

$$\text{div} \left\{ \rho_k \left\{ \frac{V_{k1}^2 + V_{k2}^2}{2} + e_k \right\} \vec{V}_k \right\} = -\text{div}(\vec{q}_k) - \text{div}(\sigma_k^V \vec{V}_k) + \xi_k, \quad (1.1.17)$$

où ξ_k représente l'énergie résultant de la masse d'espèce k produite, (liée à son énergie cinétique et son énergie interne) par unité de volume et de temps. On remarquera que comme globalement il n'y a pas de création d'énergie on a:

$$\sum_{k=1}^N \xi_k = 0; \quad (1.1.18)$$

ce que l'on exprime aussi par l'hypothèse: l'ensemble des réactions chimiques ne produisent pas d'énergie.

Nous définissons l'enthalpie massique de l'espèce k h_k et l'enthalpie massique du fluide par h :

$$h_k \stackrel{\text{def}}{=} e_k + \frac{P_k}{\rho_k}; \quad h \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^N Y_k h_k. \quad (1.1.19)$$

Sommant sur les espèces les équations (1.1.17), en tenant compte des relations (1.1.19) il vient:

$$\operatorname{div}\left(\sum_{k=1}^N \rho Y_k \left[\frac{V_{k_1}^2 + V_{k_2}^2}{2} + h_k - \frac{P_k}{\rho Y_k} \right] \vec{V}_k\right) = -\operatorname{div}\left(\sum_{k=1}^N \vec{q}_k\right) - \operatorname{div}\left(\sum_{k=1}^N \sigma_k^V \vec{V}_k\right). \quad (1.1.20)$$

Utilisant la définition (1.1.15) de \vec{v}_k et les relations (1.1.16) et (1.1.5), on a:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\sum_{k=1}^N \rho Y_k \left[\frac{(u + v_{k_1})^2 + (v + v_{k_2})^2}{2} + h_k \right] [\vec{V} + \vec{v}_k]\right) = \\ -\operatorname{div}(\vec{q}) - \operatorname{div}\left(\sum_{k=1}^N \Pi_k (\vec{V} + \vec{v}_k)\right). \end{aligned}$$

L'équation (1.1.2) et les relations (1.1.4), (1.1.19), (1.1.10), (1.1.15) conduisent à:

$$\begin{aligned} \rho \vec{V}^\top \nabla h + \operatorname{div}\left(\rho \left[\frac{u^2 + v^2}{2} \right] \vec{V}\right) + \operatorname{div}\left(\sum_{k=1}^N \rho Y_k h_k \vec{v}_k\right) = -\operatorname{div}(\vec{q}) - \operatorname{div}([\Pi + \sigma^D] \vec{V}) \\ - \operatorname{div}\left(\sum_{k=1}^N \Pi_k \vec{v}_k\right) - \operatorname{div}\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \rho_k [v_{k_1}^2 + v_{k_2}^2] [\vec{V} + \vec{v}_k]\right). \quad (1.1.21) \end{aligned}$$

Remarquant que la relation (1.1.2) permet d'écrire:

$$\operatorname{div}\left(\rho \left[\frac{u^2 + v^2}{2} \right] \vec{V}\right) = \vec{V}^\top (\rho (\vec{V}^\top \nabla) \vec{V}),$$

on évalue le membre de droite de cette équation à l'aide de la relation (1.1.14). L'équation (1.1.21) devient alors:

$$\begin{aligned} \rho \vec{V}^\top \nabla h + \operatorname{div}\left(\sum_{k=1}^N \rho Y_k h_k \vec{v}_k\right) = -\operatorname{div}(\vec{q}) - \operatorname{div}([\Pi + \sigma^D] \vec{V}) - \operatorname{div}\left(\sum_{k=1}^N \Pi_k \vec{v}_k\right) - \\ \operatorname{div}\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \rho_k [v_{k_1}^2 + v_{k_2}^2] [\vec{V} + \vec{v}_k]\right) + \vec{V}^\top \operatorname{div}(\sigma^D + \sigma^V). \quad (1.1.22) \end{aligned}$$

L'équation (1.1.22) avec l'expression de l'enthalpie $h(T, \vec{Y})$ comme fonction de T et des fractions massiques \vec{Y} ; l'expression du flux de chaleur \vec{q} comme fonction de T , ρ , et \vec{Y} ; l'expression des vitesses de diffusion \vec{v}_k comme fonctions de T , P et \vec{Y} nous permettent d'établir l'équation d'énergie exprimée avec la température.

1.2. Relations thermodynamiques.

La thermodynamique des milieux chimiquement réactifs suppose l'équilibre thermodynamique local dans l'écoulement. Elle permet de relier différentes grandeurs comme la masse volumique et l'enthalpie aux variables d'état T, P, \bar{Y} . Dans ce qui suit, nous ne considérons que des mélanges de gaz parfaits.

Dans une telle situation la loi d'état s'écrit:

$$\rho = \frac{P}{R_0 T} W, \quad (1.2.1)$$

où W représente la masse molaire du mélange, et est donnée par:

$$W = \left(\sum_{k=1}^N \frac{Y_k}{W_k} \right)^{-1}, \quad (1.2.2)$$

où W_k représente la masse molaire de l'espèce k . Dans l'expression (1.2.1) R_0 désigne la constante universelle des gaz.

L'enthalpie massique h_k de l'espèce k est définie par:

$$h_k = h_{k_0} + \int_{T_0}^T C_{p_k}(s) ds, \quad (1.2.3)$$

où h_{k_0} désigne l'enthalpie de formation à la température de référence T_0 , et où C_{p_k} désigne la chaleur massique à pression constante qui dépend de la température. La chaleur massique à pression constante du mélange C_p peut alors se définir par:

$$C_p(T, \bar{Y}) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^N Y_k C_{p_k}(T), \quad (1.2.4)$$

où le vecteur \bar{Y} à pour composantes les fractions massiques des espèces chimiques considérées Y_1, \dots, Y_N .

Finalement l'enthalpie du mélange $h(T, \bar{Y})$ est donnée par:

$$h(T, \bar{Y}) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^N Y_k h_k(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^N Y_k \left(h_{k_0} + \int_{T_0}^T C_{p_k}(s) ds \right). \quad (1.2.5)$$

Les fonctions $C_{p_k}(T)$ sont minorées par des constantes positives, et lorsqu'il s'agit de calculer l'enthalpie h , elles sont approchées par des polynômes.

La production de masse de l'espèce k par unité de temps et de volume notée $\omega_k(T, P, \bar{\rho})$ est une fonction connue de la température T , de la pression P et du vecteur densités-partielles $\bar{\rho} \stackrel{\text{déf}}{=} (\rho_1, \dots, \rho_N)^\top$. Son expression sera précisée au chapitre suivant où nous étudierons les réactions chimiques.

1.3. Relations de transport.

Les relations de transport expriment les vitesses de diffusion, le flux de chaleur et le tenseur des pressions en fonction des variables d'état T, P, \bar{Y} , de la vitesse et de leurs gradients. Ces relations s'établissent à partir de la théorie cinétique des gaz (cf [1] p. 592, [5] annexe E ou [3]). Des modèles simplifiés ont été proposés pour calculer les coefficients de transport (cf Staub [4] par exemple). Si nous utilisons la loi de Fick pour définir les vitesses de diffusion des espèces chimiques \vec{v}_k nous avons:

$$\vec{v}_k = D_k^T \nabla T + D_k^P \nabla P + \sum_{j=1}^N D_{kj}^Y \nabla Y_j, \quad 1 \leq k \leq N \quad (1.3.1)$$

où D_k^T, D_k^P, D_{kj}^Y sont des matrices 2×2 dont les coefficients sont des fonctions de ρ, T , et \bar{Y} .

Pour le flux de chaleur \vec{q} , si on suppose que l'effet Dufour (qui représente la dépendance du flux de chaleur par rapport aux flux moléculaires) et que l'énergie transportée par radiation sont négligeables, alors on exprime le flux de chaleur par conduction à l'aide de la loi de Fourier:

$$\vec{q} = \lambda \nabla T, \quad (1.3.2)$$

où λ est relié aux coefficients de conductivité thermique de l'espèce k λ_k , par la formule semi-empirique:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N Y_k \lambda_k + \left(\sum_{k=1}^N Y_k \lambda_k^{-1} \right)^{-1} \right], \quad (1.3.3)$$

ou par une formule de Wilke (cf [1] p. 597):

$$\lambda = \sum_{k=1}^N \frac{Y_k \lambda_k}{\sum_{l=1}^N Y_l \phi_{kl}}, \quad \text{avec} \quad (1.3.4)$$

$$\phi_{kl} = \frac{1}{\sqrt{8}} \sqrt{\left(1 + \frac{W_k}{W_l}\right) \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_k}{\mu_l}} \sqrt{\frac{W_k}{W_l}}\right)^2}. \quad (1.3.5)$$

Les fonctions μ_k sont des fonctions de T qui représentent la viscosité de l'espèce k . On pourra trouver une expression pour λ_k et μ_k dans [1] formules (16.16) et (16.17) p. 596 par exemple.

Pour la viscosité du mélange μ nous avons la formule semi-empirique suivante:

$$\mu = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N Y_k \mu_k + \left(\sum_{k=1}^N Y_k \mu_k^{-1} \right)^{-1} \right], \quad (1.3.6)$$

ou la formule de Wilke:

$$\mu = \sum_{k=1}^N \frac{Y_k \mu_k}{\sum_{l=1}^N Y_l \phi_{kl}}. \quad (1.3.7)$$

Remarquons que les fonctions μ_k et λ_k sont des fonctions minorées par des constantes positives, il en est donc de même pour μ et λ .

1.4. Hypothèse de la couche limite.

Soit un écoulement de fluide chimiquement réactif au dessus d'une plaque plane. On définit le domaine D dans lequel on s'intéresse à l'écoulement par $D \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$. La plaque de longueur L est définie par les points $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq L; y = 0\}$. Dans la suite de ce travail, nous nous intéresserons à des écoulements de fluide réactif dont les coefficients de transport $\lambda, \mu, D_k^T, D_k^P, D_{kj}^Y$ sont très faibles. Dans un premier temps on peut négliger les termes d'ordre supérieur à un en ces coefficients de transport afin de simplifier les relations (1.1.14) et (1.1.22). L'équation (1.1.14) s'écrit alors:

$$\rho(\vec{V}^\top \nabla) \vec{V} = -\text{div}(\sigma^V) = -\text{div}(PI + \mu \left[\frac{2}{3} \text{div}(\vec{V}) I - (\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^\top) \right]), \quad (1.4.1)$$

et l'équation (1.1.22) se simplifie en:

$$\rho \vec{V}^\top \nabla h + \text{div} \left(\sum_{k=1}^N \rho Y_k h_k \vec{v}_k \right) = -\text{div}(\lambda \nabla T) - \text{div}(\Pi \vec{V}) + \vec{V}^\top \text{div}(\sigma^V), \quad (1.4.2)$$

où Π est défini en (1.1.15). La relation (1.4.2) peut encore s'écrire après calcul:

$$\begin{aligned} \rho \vec{V}^\top \nabla h = & -\text{div} \left(\sum_{k=1}^N \rho Y_k h_k \vec{v}_k \right) - \text{div}(\lambda \nabla T) + \vec{V}^\top \nabla P + \\ & \mu [2[(\partial_x u)^2 + (\partial_y v)^2] + (\partial_x v + \partial_y u)^2]. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Maintenant, nous supposons que l'écoulement est différent d'un écoulement de fluide parfait en deçà d'une hauteur δ ($\delta \ll 1$) de la plaque et que la longueur de la plaque L est un $\mathcal{O}(1)$. Nous nous proposons d'étudier l'influence des coefficients de transport dans un voisinage $Q \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in D, 0 < x < L; 0 < y < \delta\}$ de la plaque.

Soit η_0 , un nombre positif donné, on définit les quantités

$$\lambda_c, \mu_c, D_{k_c}^T, D_{k_c}^P, D_{kj_c}^Y$$

par:

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \eta_0^2 \lambda_c; \mu \stackrel{\text{def}}{=} \eta_0^2 \mu_c; D_k^T \stackrel{\text{def}}{=} \eta_0^2 D_{k_c}^T; D_k^P \stackrel{\text{def}}{=} \eta_0^2 D_{k_c}^P; D_{kj}^Y \stackrel{\text{def}}{=} \eta_0^2 D_{kj_c}^Y. \quad (1.4.4)$$

On peut alors récrire le système S formé des équations (1.1.2), (1.1.3), (1.4.1), (1.4.3), (1.2.1), (1.2.5), (1.3.1) en remplaçant $\lambda, \mu, D_k^T, D_k^P, D_{kj}^Y$ par leurs valeurs en fonction des coefficients de transport indicés par c et définis par (1.4.4).

Si on note

$$\lambda(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \eta^2 \lambda_c; \mu(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \eta^2 \mu_c; D_k^T(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \eta^2 D_{k_c}^T; D_k^P(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \eta^2 D_{k_c}^P; D_{kj}^Y(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \eta^2 D_{kj_c}^Y$$

et si on suppose que les coefficients de transport $\lambda, \mu, D_k^T, D_k^P, D_{kj}^Y$ dépendent du paramètre η en vérifiant les relations précédentes, les équations (1.1.2), (1.1.3), (1.4.1), (1.4.3), (1.2.1), (1.2.5), (1.3.1) forment un système d'équations paramétré par η , S_η qui s'écrit:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \vec{V}) &= 0; \\ \rho \vec{V}^T \nabla Y_k &= \omega_k - \operatorname{div}(\rho Y_k \vec{v}_k); \text{ pour } k = 1, \dots, N; \\ \rho(\vec{V}^T \nabla) \vec{V} &= -\operatorname{div}(PI + \mu(\eta) \left[\frac{2}{3} \operatorname{div}(\vec{V})I - (\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^T) \right]); \\ \rho \vec{V}^T \nabla h &= -\operatorname{div} \left(\sum_{k=1}^N \rho Y_k h_k \vec{v}_k \right) - \operatorname{div}(\lambda(\eta) \nabla T) + \vec{V}^T \nabla P + \\ &\quad \mu(\eta) [2[(\partial_x u)^2 + (\partial_y v)^2] + (\partial_x v + \partial_y u)^2]; \\ \rho &= \frac{P}{R_0 T} W; \\ h(T, \vec{Y}) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^N Y_k h_k(T); \\ \vec{v}_k &= D_k^T(\eta) \nabla T + D_k^P(\eta) \nabla P + \sum_{j=1}^N D_{kj}^Y(\eta) \nabla Y_j. \end{aligned}$$

Le système S est le système que l'on obtient lorsque l'on fixe la valeur du paramètre η à η_0 ($S = S_{\eta_0}$)

Maintenant nous allons supposer que le comportement par rapport à η des solutions du système S_η n'est pas quelconque. Si ψ désigne une quelconque des fonctions solutions du système S_η (ρ, u, v, \dots), nous noterons par Ψ la fonction qui dépend de η définie par:

$$\Psi(x, y, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(x, y) \quad \forall \eta > 0. \quad (1.4.5)$$

Pour décrire le cas particulier de notre écoulement, il suffit de prendre $\eta = \eta_0$ dans (1.4.5). Supposons que l'hypothèse suivante est satisfaite:

HP1 les inconnues $\Psi(x, y, \eta)$ admettent le développement suivant:

$$\Psi(x, y, \eta) = \sum_{j \geq 0} \eta^j \psi_j(x, \frac{y}{\eta}), \quad \forall \eta > 0. \quad (1.4.6)$$

Nous définissons le domaine Q_η par:

$$Q_\eta = \{(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} (x, \frac{y}{\eta}) \text{ pour } (x, y) \in Q\}.$$

Nous notons ∂_i pour $i \in \{1, 2\}$ les dérivées par rapport à la i ème variable.

Introduisant les développements (1.4.6) dans les équations du système S_η , nous obtenons par exemple pour l'équation (1.1.2):

$$\frac{1}{\eta} \partial_2(\rho_0 v_0) + \sum_{j \geq 0} \eta^j \left\{ \sum_{0 \leq i \leq j} \partial_i(\rho_i u_{j-i}) \right\} + \sum_{j \geq 1} \eta^{j-1} \left\{ \sum_{0 \leq i \leq j} \partial_2(\rho_i v_{j-i}) \right\} = 0.$$

Identifiant les termes suivant les puissances de η , à l'ordre le plus bas nous avons:

$$\partial_2(\rho_0 v_0) = 0, \text{ dans } Q_\eta. \quad (1.4.7)$$

Utilisant la condition d'adhérence sur la plaque

$$\sum_{j \geq 0} \eta^j \left\{ \sum_{0 \leq i \leq j} (\rho_i(x, 0) v_{j-i}(x, 0)) \right\} = 0 \text{ pour } x \geq 0;$$

on a: $\rho_0(x, 0) v_0(x, 0) = 0$, ce qui avec la relation (1.4.7) fournit

$$v_0 = 0 \text{ dans } Q_\eta, \quad (1.4.8)$$

puisque ρ_0 est supposé non nul. A l'ordre suivant on a:

$$\partial_1(\rho_0 u_0) + \partial_2(\rho_0 v_1) = 0 \text{ dans } Q_\eta. \quad (1.4.9)$$

Supposant que les coefficients de transport sont des matrices dont les coefficients sont des fonctions régulières de ρ, T, \vec{Y} , en raisonnant de la même manière pour les équations (1.3.1), nous développons les coefficients de transport en fonction du paramètre η . Nous obtenons:

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} \eta^j \vec{v}_{k_j} = \sum_{j \geq 0} \eta^{j+2} \sum_{n, m \geq 0} \left\{ D_{k_{cm}}^T (\partial_1 T_m, \eta^{-1} \partial_2 T_m)^\top + D_{k_{cm}}^P (\partial_1 P_m, \eta^{-1} \partial_2 P_m)^\top + \right. \\ \left. \sum_{l=1}^N D_{k_{lcm}}^Y (\partial_1 Y_{lm}, \eta^{-1} \partial_2 Y_{lm})^\top \right\} \quad (1.4.10) \end{aligned}$$

Ceci fournit les relations suivantes à l'ordre zéro:

$$\vec{v}_{k_0} = 0; \quad k = 1, \dots, N \text{ dans } Q_\eta;$$

et à l'ordre un:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{k_1} = \left((D_{k_{c_0}}^T)_{12} \partial_2 T_0 + (D_{k_{c_0}}^P)_{12} \partial_2 P_0 + \sum_{j=1}^N (D_{k_{j c_0}}^Y)_{12} \partial_2 Y_{j_0}, \right. \\ \left. (D_{k_{c_0}}^T)_{22} \partial_2 T_0 + (D_{k_{c_0}}^P)_{22} \partial_2 P_0 + \sum_{l=1}^N (D_{k_{l c_0}}^Y)_{22} \partial_2 Y_{l_0} \right)^\top, \quad (1.4.12) \end{aligned}$$

où la notation ci-dessous a été utilisée:

$$D_{k_{c_0}}^T \stackrel{\text{déf}}{=} D_{k_{c_0}}^T(\rho_0, T_0, \vec{Y}_0); \quad D_{k_{c_0}}^P \stackrel{\text{déf}}{=} D_{k_{c_0}}^P(\rho_0, T_0, \vec{Y}_0); \quad D_{k_{l c_0}}^Y \stackrel{\text{déf}}{=} D_{k_{l c_0}}^Y(\rho_0, T_0, \vec{Y}_0).$$

On définit les équations de la couche limite réactive comme étant les équations que satisfont

les premières fonctions $\psi_j(x, \frac{y}{\eta_0})$ non nulles dans le développement (1.4.6) lorsque l'on considère les inconnues suivantes: la densité, les fractions massiques, la vitesse moyenne, les vitesses de diffusion des espèces chimiques, les enthalpies massiques, la température et la pression. Nous noterons de manière abusive ces champs inconnus dans le voisinage Q_η par: $\rho, Y_k, \bar{V}, \bar{v}_k, h_k, T, P$. On vérifie aisément que pour l'écoulement qui nous intéressait ($\eta = \eta_0$) les quantités:

$$\rho(x, y); Y_k(x, y); u_k(x, y); h_k(x, y); T(x, y); P(x, y),$$

représentent le terme d'ordre zéro (noté symboliquement $= \psi_0(x, \frac{y}{\eta_0})$) dans le développement (1.4.6), alors que les quantités

$$v(x, y); v_{k_1}(x, y); v_{k_2}(x, y),$$

représentent le terme d'ordre un (noté symboliquement $\eta_0 \psi_1(x, \frac{y}{\eta_0})$) dans le développement (1.4.6). Nous en déduisons les équations de la couche limite, que doivent satisfaire les inconnues $\rho, u, v, Y_k, h, P, v_{k_2}$, écrites avec les variables (x, y) dans le domaine Q qui s'écrivent:

$$\partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0 \text{ dans } Q; \quad (1.4.13)$$

$$\rho \bar{V}^\top \nabla Y_k = \omega_k(T, P, \bar{Y}) - \partial_y(\rho Y_k v_{k_2}) \text{ dans } Q \text{ pour } k = 1, \dots, N; \quad (1.4.14)$$

$$\rho \bar{V}^\top \nabla u - \partial_y(\mu \partial_y u) = -\partial_x P \text{ dans } Q; \quad (1.4.15)$$

$$\partial_y P = 0 \text{ dans } Q; \quad (1.4.16)$$

$$\begin{aligned} & \rho \bar{V}^\top \nabla h(T, \bar{Y}) - \partial_y(\lambda \partial_y T) = \\ & u \partial_x P - \partial_y \left(\sum_{k=1}^N \rho Y_k h_k(T) v_{k_2} \right) + \mu (\partial_y u)^2 \text{ dans } Q; \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

$$\rho = \frac{P}{R_0 T} \left(\sum_{k=1}^N \frac{Y_k}{W_k} \right)^{-1}; \quad (1.4.18)$$

$$h(T, \bar{Y}) = \sum_{k=1}^N Y_k h_k(T); \quad (1.4.19)$$

$$v_{k_2} = (D_k^T)_{22} \partial_y T + (D_k^P)_{22} \partial_y P + \sum_{l=1}^N (D_{kl}^Y)_{22} \partial_y Y_l. \quad (1.4.20)$$

A ce système d'équations il convient d'ajouter des conditions aux limites et initiales. Nous dénommons conditions initiales les conditions en $x = 0$ par analogie avec les problèmes évolutifs. La méthode pour calculer ces conditions initiales sera précisée au chapitre 6. Les conditions aux limites sont obtenues par la méthode dite des développements asymptotiques rattachés voir [1], [3] ou [6] par exemple. On a donc les relations suivantes: pour les conditions initiales en $x = 0$:

$$\text{on doit se donner } u(0, y), v(0, y), T(0, y), Y_k(0, y) \text{ pour } 1 \leq k \leq N, 0 \leq y \leq \delta; \quad (1.4.21)$$

pour les conditions aux limites, sur la plaque:

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0; T(x, 0) = T_c(x); Y_k(x, 0) = Y_{k_c}(x), 1 \leq k \leq N, \text{ pour } 0 < x \leq L; \quad (1.4.22)$$

pour les conditions aux limites sur le bord extérieur de la couche limite:

$$u(x, \delta_0) = U_e(x); T(x, \delta_0) = T_e(x); P(x) = P_e(x); 0 < x \leq L; \quad (1.4.23)$$

$$Y_k(x, \delta_0) = Y_{e_k}(x), 1 \leq k \leq N; 0 < x \leq L. \quad (1.4.24)$$

Les champs U_e, T_e, P_e, Y_{e_k} représentent la trace sur la plaque respectivement de la vitesse tangentielle, de la température, de la pression, et des fractions massiques des espèces définis à l'extérieur de la couche limite, c'est-à-dire, la trace des solutions du système S (équations (1.1.2), (1.1.3), (1.4.1), (1.4.3), (1.2.1), (1.2.5), (1.3.1)) lorsque les coefficients de transport sont tous égaux à zéro. Si on suppose que les vitesses de diffusion des espèces sont négligeables, et que $v(x, \delta_0) < 0$, alors on n'a pas à donner les fractions massiques sur la plaque.

Remarques.

La relation $\sum_{k=1}^N Y_k = 1$ doit-être vérifiée comme conséquence des relations (1.1.1).

En toute généralité, les coefficients de transport n'ont pas de raison particulière d'être du même ordre de grandeur. Néanmoins dans le cas d'écoulements où les nombres de Schmidt et de Prandtl sont proches de un cette hypothèse n'est pas absurde.

L'équation (1.4.17) peut se récrire en tenant compte de l'équation (1.4.14) et des relations (1.4.19) et (1.2.4) comme une équation ne faisant intervenir que la température:

$$\rho C_p(T, \vec{Y}) \vec{V}^T \nabla T - \partial_y (\lambda \partial_y T) = u \partial_x P - \partial_y \left(\sum_{k=1}^N \rho Y_k h_k(T) v_{k_2} \right) + \mu (\partial_y u)^2 - \sum_{k=1}^N \partial_y h_k(T) (\rho Y_k v_{k_2}) - \sum_{k=1}^N h_k(T) \omega_k(T, P, \vec{Y}) \text{ dans } Q. \quad (1.4.25)$$

REFERENCES

1. Anderson, J.D., *Hypersonic and high temperature gas dynamics, series in aeronautical and aerospace engineering*, Mc Graw-Hill, 1989.
2. Boillat E., Pousin J., *Ecoulement de l'air sur une plaque plane lorsque que l'on tient compte de sa réactivité chimique*, Rapport interne du Département de Mathématiques Ecole polytechnique Fédérale de Lausanne (1988).
3. Kuo K., *Principles of combustion*, John Wiley-Sons, 1986.
4. Straub D., *Exakte gleichungen fur die transportkoeffizienten eines funfkomponentengemisches als modellgas dissoziiert luft*, Deutsche Luft und Raumfahrt, DLR-FB 72-34 (1972).
5. Williams F. A., *Combustion theory*, Benjamin-Cumming, 1985.
6. Van Dyke, *Perturbation Methods in fluid Mechanics*, Academic Press, 1964.

CHAPITRE 2

Quelques propriétés thermodynamiques de l'air

Résumé.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de décrire un modèle du taux de production massique des espèces (en abrégé T.P.M.E) lorsque des réactions chimiques se produisent. Le formalisme que nous utilisons permet de mettre en évidence une relation entre le vecteur des potentiels chimiques, le vecteur du T.P.M.E et la fonction d'enthalpie libre. Cette relation sera utilisée lors de l'étude du comportement asymptotique des fractions massiques lorsque nous considérerons un écoulement d'air (traité comme un fluide réactif) autour d'un corps. En outre, dans ce chapitre nous étudions la régularité par rapport à la température et la pression des fonctions représentant les masses partielles (ou masses des différentes espèces) à l'équilibre. Ce résultat sera utilisé dans les modèles numériques que nous décrivons au chapitre 6. Les résultats de ce chapitre ont été déjà présentés dans Boillat-Pousin [2]. Concernant l'extension de ces résultats à un cadre plus général que celui des gaz parfaits, le lecteur pourra consulter Boillat [1], par exemple.

2.0. Introduction.

L'objet de ce chapitre est de fournir un modèle pour le taux de production massique des espèces constituant l'air considéré comme un fluide chimiquement réactif, et d'étudier la régularité par rapport à la température et la pression des fonctions représentant les masses partielles (ou masses des différentes espèces) à l'équilibre chimique. Pour ce faire, nous avons adopté l'organisation suivante: tout d'abord, nous donnons, à l'aide des potentiels chimiques des espèces, une expression du taux de production massique par unité de masse des espèces chimiques constituant l'air. Ensuite, à la section 1, l'espace des réactions chimiques et la matrice stoechiométrique sont définis, et quelques propriétés simples qu'ils satisfont sont énumérées. A la section 2, les propriétés élémentaires caractérisant la fonction d'enthalpie libre sont rappelées. A la section 3, nous rappelons la définition des masses partielles à l'équilibre et nous étudions la régularité par rapport à la température des fonctions les représentant. De plus, quelques propriétés simples du T.P.M.E sont présentées. Finalement à la section 4, nous établissons une inégalité reliant le vecteur T.P.M.E, le vecteur des potentiels chimiques de ces mêmes espèces et la fonction d'enthalpie libre.

Soit Z l'ensemble des espèces chimiques: $Z = \{z_1, \dots, z_N\}$.

Considérons la réaction suivante en phase gazeuse:

$$\sum_{k=1}^N \nu_k^+ z_k \rightarrow \sum_{k=1}^N \nu_k^- z_k, \quad (2.0.1)$$

où ν_k^\pm sont les coefficients stoechiométriques de la réaction (cf Kuo [11] chap. 2 par exemple) donc des entiers, et où z_k désigne la k^{ieme} espèce chimique parmi les N espèces possibles.

Nous définissons la vitesse de réaction de (2.0.1) par unité de temps de la gauche vers la droite par:

$$K \prod_{k=1}^N C_k^{\nu_k^+}, \quad (2.0.2)$$

où C_k représente la concentration molaire de l'espèce k . Dans le cas où la réaction se trouve dans un voisinage de l'équilibre thermodynamique* (encore appelé équilibre chimique), alors K est une constante positive qui dépend de la température T et de la pression P mais pas des concentrations et qui peut être calculée à partir de l'équilibre thermodynamique. La constante K peut aussi être spécifiée en considérant un modèle cinétique décrivant les collisions possibles entre molécules (cf Feynman [7] p. 42.7, 42.8, [11] chap. 2, où Williams [14]). Arrhenius proposa l'expression suivante pour K :

$$K = BT^\alpha \exp\left(-\frac{E_a}{R_0 T}\right), \quad (2.0.3)$$

*c'est-à-dire que l'énergie, mesurée à partir d'un état dit de référence, que la réaction peut échanger est petite. Si celle-ci est nulle on dit que la réaction est à l'équilibre.

où R_0 désigne la constante universelle des gaz, E_a l'énergie d'activation de la réaction, α une constante, et B une constante (par rapport à la température) positive. Extrapolant cette modélisation au cas de la réaction réversible:

$$\sum_{k=1}^N \nu_k^+ z_k \rightleftharpoons \sum_{k=1}^N \nu_k^- z_k, \quad (2.0.4)$$

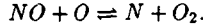
on définit la vitesse d'avancement q de la réaction comme la différence des vitesses de réaction inverse et directe:

$$q \stackrel{\text{def}}{=} K_r \prod_{k=1}^N C_k^{\nu_k^-} - K_f \prod_{k=1}^N C_k^{\nu_k^+}, \quad (2.0.5)$$

$K_f > 0$ et $K_r > 0$ sont les vitesses directe et inverse de la réaction et sont liées à la constante d'équilibre de la réaction K_e par la relation:

$$\frac{K_f}{K_r} = K_e, \quad (2.0.6)$$

si on se trouve dans un voisinage de l'équilibre chimique. Dans le cas de l'air, supposant qu'il est constitué de cinq espèces chimiques soit, $Z = \{N, O, N_2, O_2, NO\}$, considérons la réaction suivante:



Pour cette réaction, on aura:

$$\nu_1^+ = \nu_3^+ = \nu_4^+ = 0, \nu_2^+ = \nu_5^+ = 1; \text{ et } \nu_2^- = \nu_3^- = \nu_5^- = 0, \nu_1^- = \nu_4^- = 1.$$

On trouvera dans la littérature, suivant le type de réaction que l'on considère, un grand nombre d'expressions en fonction de variables physiques pertinentes pour ces constantes K_e, K_r (cf Giovengigli [8] p. 33 pour quelques problèmes de combustion, [11] chap. 2 où [14] annexe B).

Le taux de production massique Ω_k^z de l'espèce k (c'est-à-dire la masse de l'espèce k produite par unité de temps et par unité de masse) s'écrit alors:

$$\Omega_k^z \stackrel{\text{def}}{=} q R_k \quad \text{où } R_k \stackrel{\text{def}}{=} R_k^+ - R_k^-; R_k^\pm \stackrel{\text{def}}{=} W_k \nu_k^\pm, \text{ pour } 1 \leq k \leq N; \quad (2.0.7)$$

W_k représente la masse molaire de l'espèce k .

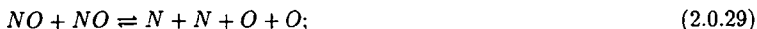
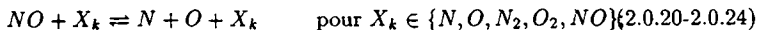
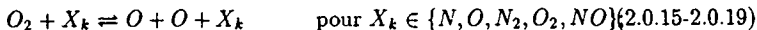
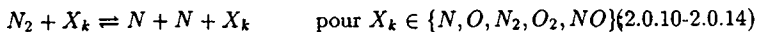
Si l'on s'intéresse à un ensemble de \mathcal{L} réactions, on indice par j les quantités précédemment définies pour chaque réaction, et on obtient comme expression pour Ω_k^z :

$$\Omega_k^z = \sum_{j=1}^{\mathcal{L}} q_j R_{j,k}. \quad (2.0.9)$$

Considérons maintenant le cas de l'air. On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites:

HP1 i) l'air est un mélange de gaz parfaits et constitué des cinq espèces chimiques suivantes: N, O, N_2, O_2, NO ;

HP1 ii) seules les vingt et une réactions chimiques suivantes se produisent:



et se trouvent dans un voisinage de l'équilibre chimique.

Remarque

Une hypothèse standard est que pour des densités faibles tout mélange gazeux se comporte asymptotiquement comme un gaz parfait.

Nous désignons par \vec{R}_j^\pm le vecteur $(R_{j1}^\pm, \dots, R_{js}^\pm)^\top$, et par \vec{R}_j le vecteur $(R_{j1}^+ - R_{j1}^-, \dots, R_{js}^+ - R_{js}^-)^\top$ de la $j^{\text{ème}}$ réaction, pour $1 \leq j \leq 21$. Ecrivons les vecteurs \vec{R}_2 , \vec{R}_7 et \vec{R}_{15} , correspondant aux réactions (2.0.11), (2.0.16) et (2.0.24) par exemple. On a:

$$\vec{R}_2 = (-2W_N, 0, W_{N_2}, 0, 0)^\top; \quad \vec{R}_7 = (0, -2W_O, 0, W_{O_2}, 0)^\top; \\ \vec{R}_{15} = (-W_N, -W_O, 0, 0, W_{NO})^\top. \quad (2.0.31)$$

L'intérêt d'introduire les vecteurs \vec{R}_j comme représentant la $j^{\text{ème}}$ réaction chimique réside dans les remarques suivantes: les réactions chimiques que l'on considère ne sont pas linéairement indépendantes, mais doivent être "équilibrées" pour respecter le principe de Lavoisier, c'est-à-dire ne créer ni ne détruire d'atomes. On traduira cela pour les vecteurs \vec{R}_j (objets plus manipulables) par: l'ensemble des \vec{R}_j ne constitue pas une famille libre mais engendre un espace appelé espace des réactions chimiques ou noyau de la matrice stoechiométrique. Cette propriété est nécessaire. Ainsi grâce à des arguments d'algèbre linéaire on peut décider du nombre et des réactions qu'il faut prendre en considération.

Introduisons quelques notations. On désigne par $\vec{M} = (M_1, \dots, M_N)^\top$ le vecteur des masses partielles (masses de chaque espèce), et par $\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})$ le vecteur $(\mu_1^z(T, P, \vec{M}), \dots, \mu_N^z(T, P, \vec{M}))^\top$ des potentiels chimiques (voir [14] pour une définition par exemple).

Maintenant montrons que le T.P.M.E peut s'exprimer à partir des potentiels chimiques μ_k^\pm des différentes espèces. Ayant un mélange de gaz parfaits on a l'expression suivante pour les potentiels chimiques μ_k^\pm de chaque espèce k , $1 \leq k \leq 5$:

$$\mu_k^\pm(T, P, \vec{M}) = h_k(T) - T \int_{T_0}^T \frac{C_{p_k}(\tau)}{\tau} d\tau + \frac{R_0 T}{W_k} \left\{ \log(P) + \log\left(\frac{\frac{M_k}{W_k}}{\sum_{i=1}^5 \frac{M_i}{W_i}}\right) \right\} + T\tilde{C}_{0_k}, \quad (2.0.32)$$

où $h_k(T)$ représente l'enthalpie par unité de masse de la $k^{\text{ième}}$ espèce à la température T , et où $C_{p_k}(T)$ représente la chaleur spécifique à pression constante et par unité de masse de la $k^{\text{ième}}$ espèce:

$$C_{p_k}(T) = \frac{d}{dT} h_k(T).$$

La quantité $T_0 \in \mathbb{R}_+^*$ est une borne arbitraire, et \tilde{C}_{0_k} est une constante.

Il existe différents modèles qui précisent la dépendance de l'enthalpie massique par rapport à la température. Les modèles de Straub [13], de Park [12] ou de Gardiner [6] consistent à approcher les enthalpies massiques $h_k(T)$ des espèces par des fonctions polynômiales de la température, à estimer les constantes \tilde{C}_{0_k} et à préciser les constantes K_e, K_f, K_r comme des fonctions régulières de la température et de la pression. On peut trouver ces approximations dans [2], [6] où [12] par exemple. Dans la suite de ce travail, nous ne considérerons que de tels modèles.

Définissons la fonction $\xi_k(T)$ par:

$$\xi_k(T) = h_k(T) - T \int_{T_0}^T \frac{C_{p_k}(\tau)}{\tau} d\tau + T\tilde{C}_{0_k},$$

lorsque les enthalpies massiques sont approchées par des fonctions polynômiales de la température.

Soit la réaction (2.0.4) par exemple, la vitesse d'avancement q de cette réaction (voir (2.0.5)) s'écrit en fonction des masses partielles $\{M_k\}_{k=1}^5$ comme

$$q = \frac{K_r \prod_{k=1}^5 \left(\frac{M_k}{W_k}\right)^{\nu_k^-}}{\left(\sum_{j=1}^5 \frac{M_j}{W_j}\right)^{\sum_{k=1}^5 \nu_k^-}} - \frac{K_f \prod_{k=1}^5 \left(\frac{M_k}{W_k}\right)^{\nu_k^+}}{\left(\sum_{j=1}^5 \frac{M_j}{W_j}\right)^{\sum_{k=1}^5 \nu_k^+}}. \quad (2.0.33)$$

On calcule alors la quantité suivante (où les composantes du vecteur \vec{R}^\pm sont définies par

(2.0.7)) :

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \vec{R}^-}{R_0 T} \right\} - \exp \left\{ \frac{\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \vec{R}^+}{R_0 T} \right\} = \\ \exp \left\{ \frac{1}{R_0 T} \left[\sum_{k=1}^5 \xi_k(T) \nu_k^- W_k \right] + \sum_{k=1}^5 \log(P^{\nu_k^-}) \right\} \frac{\prod_{k=1}^5 \left(\frac{M_k}{W_k} \right)^{\nu_k^-}}{\left(\sum_{j=1}^5 \frac{M_j}{W_j} \right) \sum_{k=1}^5 \nu_k^-} - \\ \exp \left\{ \frac{1}{R_0 T} \left[\sum_{k=1}^5 \xi_k(T) \nu_k^+ W_k \right] + \sum_{k=1}^5 \log(P^{\nu_k^+}) \right\} \frac{\prod_{k=1}^5 \left(\frac{M_k}{W_k} \right)^{\nu_k^+}}{\left(\sum_{j=1}^5 \frac{M_j}{W_j} \right) \sum_{k=1}^5 \nu_k^+}. \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} A_-(T, P) &= \exp \left\{ \frac{1}{R_0 T} \left[\sum_{k=1}^5 \xi_k(T) \nu_k^- W_k \right] + \sum_{k=1}^5 \log(P^{\nu_k^-}) \right\}, \\ A_+(T, P) &= \exp \left\{ \frac{1}{R_0 T} \left[\sum_{k=1}^5 \xi_k(T) \nu_k^+ W_k \right] + \sum_{k=1}^5 \log(P^{\nu_k^+}) \right\}, \end{aligned}$$

et on définit $H_-(T, P)$ et $H_+(T, P)$ par:

$$H_-(T, P) \stackrel{\text{dét}}{=} \frac{K_r(T, P)}{A_-(T, P)}; \quad H_+(T, P) \stackrel{\text{dét}}{=} \frac{K_f(T, P)}{A_+(T, P)}.$$

Il est alors aisé de déduire de (2.0.33) que:

$$q = H_-(T, P) \exp \left\{ \frac{\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \vec{R}^-}{R_0 T} \right\} - H_+(T, P) \exp \left\{ \frac{\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \vec{R}^+}{R_0 T} \right\}. \quad (2.0.34)$$

En considérant la réaction à l'équilibre chimique on a $q = 0$; ($\vec{\mu}^z$)^T $\vec{R} = 0$ (d'après le lemme 2.3.1 puisque \vec{R} appartient au noyau de la matrice stoechiométrique), cette dernière relation entraîne:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \vec{R}^-}{R_0 T} \right\} - \exp \left\{ \frac{\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \vec{R}^+}{R_0 T} \right\} = \\ \exp \left\{ \frac{\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \vec{R}^-}{R_0 T} \right\} \left[1 - \exp \left\{ \frac{\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \vec{R}}{R_0 T} \right\} \right] = 0. \end{aligned}$$

Nous déduisons alors de $q = 0$ que: $H_-(T, P) = H_+(T, P) = H(T, P)$, ce qui avec (2.0.34) permet d'écrire:

$$q = H(T, P) \left[\exp \left\{ \frac{\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \vec{R}^-}{R_0 T} \right\} - \exp \left\{ \frac{\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \vec{R}^+}{R_0 T} \right\} \right]. \quad (2.0.35)$$

Raisonnant de même pour les réactions (2.0.10),..., (2.0.30), de la définition (2.0.7) nous déduisons que l'assertion suivante est satisfaite:

P1 pour tout $1 \leq j \leq 21$ il existe $H_j(T, P) \in C^1((\mathbf{R}_+^*)^2; \mathbf{R}_+^*)$ telles que:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}^z(T, P, \vec{M}) = \sum_{j=1}^{21} H_j(T, P) \left[\exp\left(\frac{\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \vec{R}_j^-}{R_0 T}\right) - \right. \\ \left. \exp\left(\frac{\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \vec{R}_j^+}{R_0 T}\right) \right] [\vec{R}_j^+ - \vec{R}_j^-] \quad \forall (T, P, \vec{M}) \in (\mathbf{R}_+^*)^2 \times (\mathbf{R}_+^*)^5, \quad (2.0.36) \end{aligned}$$

où $\tilde{\Omega}^z(T, P, \vec{M})$ désigne le vecteur $(\Omega_1^z(T, P, \vec{M}), \dots, \Omega_N^z(T, P, \vec{M}))^\top$.

Remarque.

Lien entre ω_k et Ω_k^z . Au chapitre 1 nous avons défini ω_k la production de masse de l'espèce k par unité de temps et par unité de volume comme une fonction de T, P et $\vec{\rho} \stackrel{\text{def}}{=} (\rho_1, \dots, \rho_N)^\top$ les densités des espèces. Donnons la relation qui lie ω_k à Ω_k^z . On a:

$$\omega_k(T, P, \vec{\rho}) = \Omega_k^z(T, P, \vec{\rho}) \left(\sum_{j=1}^5 \rho_j \right) \text{ pour } 1 \leq k \leq 5.$$

Utilisant la propriété d'intensivité (homogénéité de degré zéro) de Ω_k^z par rapport à \vec{M} (qui est une conséquence de l'intensivité de $\vec{\mu}^z$ cf (2.0.32)), il vient:

$$\omega_k(T, P, \vec{\rho}) = \Omega_k^z(T, P, \frac{\vec{\rho}}{\sum_{j=1}^5 \rho_j}) \left(\sum_{j=1}^5 \rho_j \right). \quad (2.0.37)$$

2.1. Espace des réactions chimiques, matrice stoechiométrique.

Dans l'ensemble des espèces chimiques $Z = \{z_1, \dots, z_N\}$ nous distinguons le sous-ensemble $X^z = \{x_1, \dots, x_M\}$ constitué des M espèces chimiques atomiques, c'est-à-dire ne comprenant qu'un seul atome. Nous supposons que

HP2 si un atome est présent dans une espèce chimique alors l'espèce chimique atomique le représentant existe dans Z .

Nous noterons $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_M\}$ les masses totales des atomes $\{x_1, \dots, x_M\}$. On définit la matrice stoechiométrique A^z relative à l'ensemble Z comme étant la $M \times N$ matrice à coefficients positifs vérifiant la relation:

$$\vec{\mathcal{M}} = A^z \vec{M}, \quad (2.1.1)$$

où $\vec{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_M)^\top$. La quantité A_{ik}^z représente le nombre d'unités de masse de l'atome x_i dans une unité de masse de l'espèce z_k , $1 \leq i \leq M$; $1 \leq k \leq N$. On a trivialement:

$$\begin{cases} A_{ik}^z \in [0, 1] \text{ pour } 1 \leq i \leq M; 1 \leq k \leq N \\ \sum_{i=1}^M A_{ik}^z = 1. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

On remarquera que N est toujours plus grand que M qui est positif. Si on choisit d'ordonner l'ensemble Z de la manière suivante: $\{x_1, \dots, x_M, z_{M+1}, \dots, z_N\}$ on a:

$$A_{ij}^z = \delta_{ij} \text{ pour } 1 \leq i, j \leq M, \quad (2.1.3)$$

d'où l'on déduit que A^z est de rang maximum M et que $\dim \text{Ker} A^z = N - M$. Le noyau de la matrice A^z est appelé l'espace des réactions chimiques relatif à Z .

De la propriété (2.1.3) nous déduisons une base évidente de $\text{Ker} A^z$:

$$\begin{aligned} B^z &= \{\vec{f}_{M+1}^z, \dots, \vec{f}_N^z\}, \text{ avec} \\ f_{jk}^z &= -A_{kj}^z \quad 1 \leq k \leq M, \quad M+1 \leq j \leq N; \\ f_{jk}^z &= +\delta_{jk} \quad M+1 \leq k \leq N, \quad M+1 \leq j \leq N. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Le vecteur \vec{f}_j^z s'appelle le vecteur de formation pour la $j^{\text{ème}}$ espèce.

Ecrivons dans le cas de l'air avec $Z = \{N, O, N_2, O_2, NO\}$ la matrice A^z :

$$A^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{W_{N_2}}{2W_{NO}} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{W_{O_2}}{2W_{NO}} \end{pmatrix}.$$

Une base du noyau de A^z est composée des vecteurs:

$$\begin{aligned} \vec{f}_3^z &= (-1, 0, 1, 0, 0)^\top; \quad \vec{f}_4^z = (0, -1, 0, 1, 0)^\top; \\ \vec{f}_5^z &= \left(\frac{-W_{N_2}}{2W_{NO}}, \frac{-W_{O_2}}{2W_{NO}}, 0, 0, 1\right)^\top = \frac{1}{2W_{NO}} (-2W_N, -2W_O, 0, 0, 2W_{NO})^\top. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{A}_{\vec{\mathcal{M}}}^z$ le sous-ensemble suivant de \mathbb{R}_+^5 :

$$\mathcal{A}_{\vec{\mathcal{M}}}^z = \{\vec{M} \in \mathbb{R}_+^5 \text{ tels que } A^z \vec{M} = \vec{\mathcal{M}}\}, \text{ où } \vec{\mathcal{M}} \in \mathbb{R}_+^2. \quad (2.1.5)$$

Nous introduisons aussi $\dot{\mathcal{A}}_{\vec{\mathcal{M}}}^z$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}_{\vec{\mathcal{M}}}^z$ stable par les perturbations appartenant au noyau de A^z :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{A}}_{\vec{\mathcal{M}}}^z = \{ \vec{M} \in \mathcal{A}_{\vec{\mathcal{M}}}^z \text{ tels que } \forall \vec{R} \in \text{Ker } A^z, \exists \epsilon > 0 \text{ tel que} \\ \vec{M} + \lambda \vec{R} \in \mathcal{A}_{\vec{\mathcal{M}}}^z \forall \lambda \in (-\epsilon, \epsilon) \}. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Nous noterons $\mathcal{B}(\mathcal{A}_{\vec{\mathcal{M}}}^z)$ la différence suivante:

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}_{\vec{\mathcal{M}}}^z) = \mathcal{A}_{\vec{\mathcal{M}}}^z \setminus \dot{\mathcal{A}}_{\vec{\mathcal{M}}}^z. \quad (2.1.7)$$

A l'aide de la base \mathcal{B}^z de $\text{Ker } A^z$ (voir (2.1.4)) on identifie aisément $\mathcal{B}(\mathcal{A}_{\vec{\mathcal{M}}}^z)$ à $\mathcal{A}_{\vec{\mathcal{M}}}^z \cap \partial \mathbb{R}_+^5$, où $\partial \mathbb{R}_+^5$ désigne le bord de \mathbb{R}_+^5 .

Nous terminons cette section en établissant quelques propriétés que vérifie $\mathcal{A}_{\vec{\mathcal{M}}}^z$.

lemme 2.1.1. *Supposons les hypothèses HP1 i) et HP2 satisfaites, alors le sous-ensemble $\dot{\mathcal{A}}_{\vec{\mathcal{M}}}^z$ de $\mathcal{A}_{\vec{\mathcal{M}}}^z$, stable par les perturbations appartenant au noyau de A^z , défini en (2.1.6) est non vide si et seulement si toutes les composantes du vecteur $\vec{\mathcal{M}}$ sont positives, c'est-à-dire:*

$$\dot{\mathcal{A}}_{\vec{\mathcal{M}}}^z \neq \emptyset \Leftrightarrow \vec{\mathcal{M}} \in (\mathbb{R}_+^*)^2. \quad (2.1.8)$$

De plus on a la relation suivante pour les normes des vecteurs \vec{M} et $\vec{\mathcal{M}}$:

$$\text{si } \vec{M} \in \mathcal{A}_{\vec{\mathcal{M}}}^z \text{ alors } \|\vec{M}\|_1 = \|\vec{\mathcal{M}}\|_1, \text{ où } \|\vec{\mathcal{M}}\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^5 |M_i|; \quad (2.1.9)$$

et pour tout ensemble \mathcal{K} compact de \mathbb{R}_+^2 on a:

$$\bigcup_{\vec{\mathcal{M}} \in \mathcal{K}} \mathcal{A}_{\vec{\mathcal{M}}}^z \text{ est compact dans } \mathbb{R}_+^5. \quad (2.1.10)$$

Démonstration. Pour prouver l'assertion (2.1.8), considérons $\vec{\mathcal{M}} \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et construisons un $\vec{M} \in (\mathbb{R}_+^*)^5$ tel que $A^z \vec{M} = \vec{\mathcal{M}}$. En utilisant la propriété (2.1.3) on pourra prendre par exemple:

$$\begin{aligned} \vec{M} = (M_1, M_2, \epsilon, \dots, \epsilon)^T \text{ où } M_i = \mathcal{M}_i - \epsilon \sum_{k=3}^5 A_{ik}^z \text{ pour } i = 1, 2 \text{ et} \\ \epsilon = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq 2} \frac{\mathcal{M}_i}{\sum_{k=3}^5 A_{ik}^z}. \end{aligned}$$

Si $\dot{\mathcal{A}}_{\vec{\mathcal{M}}}^z \neq \emptyset$ montrons que $\vec{\mathcal{M}} \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Soit $\vec{M} \in \dot{\mathcal{A}}_{\vec{\mathcal{M}}}^z$, on a d'après (2.1.2) et (2.1.3):

$$\mathcal{M}_i = \sum_{j=1}^5 A_{i,j}^z M_j \geq M_i \quad 1 \leq i \leq 2.$$

La définition (2.1.6) de $\dot{\mathcal{A}}_{\vec{\mathcal{M}}}^z$ et l'assertion (2.1.4) impliquent que $M_i > 0$ pour $1 \leq i \leq 5$. Ainsi (2.1.8) est démontrée.

La propriété (2.1.9) est une conséquence immédiate de (2.1.2).

Montrons la propriété (2.1.10). De l'assertion (2.1.9) on déduit que $\bigcup_{\vec{\mathcal{M}} \in \mathcal{K}} \mathcal{A}_{\vec{\mathcal{M}}}^z$ est un ensemble borné, puisque \mathcal{K} est un compact de \mathbb{R}^2 . Il suffit alors de vérifier que $\bigcup_{\vec{\mathcal{M}} \in \mathcal{K}} \mathcal{A}_{\vec{\mathcal{M}}}^z$ est un ensemble fermé. L'ensemble $\bigcup_{\vec{\mathcal{M}} \in \mathcal{K}} \mathcal{A}_{\vec{\mathcal{M}}}^z$ est l'intersection de deux ensembles fermés: \mathbb{R}_+^5 et la pré-image de \mathcal{K} (qui est fermé) par l'application continue $A^z : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Le lemme 2.1.1 est démontré.

□

2.2. Quelques propriétés de la fonction d'enthalpie libre.

Soit un mélange gazeux homogène constitué de N espèces chimiques z_1, \dots, z_N . La thermodynamique postule l'existence d'une fonction réelle g^Z , appelée enthalpie libre, dépendant de la température T , de la pression P , et des masses partielles M_k (la quantité de matière étant représentée par les masses partielles) et possédant des propriétés particulières que nous décrivons dans la suite pour le cas de l'air. (cf Callen [3], James [9] par exemple). Etudions le cas de l'air supposé être un mélange de gaz parfaits et constitué de 5 espèces chimiques, $Z = \{N, O, N_2, O_2, NO\}$ (cf hypothèse HP1 i)). Nous avons alors les expressions suivantes pour les composantes du vecteur des potentiels chimiques $\vec{\mu}^Z$ (voir (2.0.32))

$$\mu_k^Z(T, P, \vec{M}) = \chi_k(T, P) + \frac{R_0 T}{W_k} \log \left(\frac{\frac{M_k}{W_k}}{\sum_{i=1}^5 \frac{M_i}{W_i}} \right);$$

$$\chi_k(T, P) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} h_k(T) - T \int_{T_0}^T \frac{C_{p_k}(\tau)}{\tau} d\tau + T \tilde{C}_{0,k} + \frac{R_0 T}{W_k} \log(P), \quad 1 \leq k \leq 5.$$

Nous supposons que l'hypothèse suivante est satisfaite:

HP3 les fonctions $\chi_k(T, P) \in C^2([\mathbf{R}_+^*]^2; \mathbf{R})$ pour $1 \leq k \leq 5$.

Pour $i = 1, 2, \dots, 5$ nous définissons Σ_i^5 le sous-ensemble de \mathbf{R}_+^5 par:

$$\Sigma_i^5 = \{\vec{M} \in \mathbf{R}_+^5 \text{ tels que } M_i = 0\}, \quad (2.2.1)$$

et la fonction g^Z par:

$$g^Z(T, P, \vec{M}) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sum_{k=1}^5 \left[\chi_k(T, P) M_k + R_0 T \frac{M_k}{W_k} \log \left(\frac{\frac{M_k}{W_k}}{\sum_{i=1}^5 \frac{M_i}{W_i}} \right) \right], \quad \forall T, P, \vec{M} \in [\mathbf{R}_+^*]^2 \times [\mathbf{R}_+^*]^5. \quad (2.2.2)$$

Nous noterons $Z_1(\vec{M})$ le sous-ensemble de Z comprenant les espèces qui ont une masse non nulle dans le vecteur \vec{M} , et \vec{M} représente le vecteur ayant pour composantes les composantes non nulles du vecteur \vec{M} .

Concernant la fonction g^Z nous avons les résultats suivants:

Lemme 2.2.1. Supposant les hypothèses HP1 i), et HP3 satisfaites, alors la fonction g^Z définie par l'expression (2.2.2) vérifient les propriétés suivantes:

$$i) \left\{ \begin{array}{l} g^Z(T, P, \vec{M}) \in C^2([\mathbf{R}_+^*]^2 \times [\mathbf{R}_+^*]^5; \mathbf{R}) \cap C^0([\mathbf{R}_+^*]^2 \times [\mathbf{R}_+^* \setminus \vec{0}]; \mathbf{R}); \\ g^Z(T, P, \vec{M}) = g^{Z_1(\vec{M})}(T, P, \vec{M}), \end{array} \right. \quad (2.2.3)$$

$$ii) \mu_k^Z(T, P, \vec{M}) = \frac{\partial g^Z(T, P, \vec{M})}{\partial M_k}, \quad (2.2.4)$$

Démonstration. L'assertion (2.2.3) est immédiate à vérifier en utilisant la propriété bien connue du logarithme: $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$. Le lemme 2.2.1 est démontré.

□

Lemme 2.2.2. Supposant les hypothèses HP1 i) et HP3 satisfaites, alors les dérivées de la fonction g^Z définie par l'expression (2.2.2) vérifient les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} & i) \forall (T, P) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \lim_{\vec{M} \rightarrow \vec{M}_k} \mu_k^i(T, P, \vec{M}) = -\infty \text{ si } \vec{M}_k \in \Sigma_5^k \setminus \vec{0}, 1 \leq k \leq 5; \\ & ii) \frac{\partial \mu_k^i}{\partial M_j}(T, P, \vec{M}) \exp \left\{ \frac{\mu_k^i(T, P, \vec{M}) W_k}{R_0 T} \right\} \text{ existe } \forall (T, P, \vec{M}) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \times [\mathbb{R}_+^5 \setminus \vec{0}] \\ & \text{et est continue sur } (\mathbb{R}_+^*)^2 \times [\mathbb{R}_+^5 \setminus \vec{0}] \text{ pour } 1 \leq j, k \leq 5. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

De plus,

$$g^Z \text{ est une fonction convexe, homogène de degré 1 de la variable } \vec{M}, \forall \vec{M} \in (\mathbb{R}_+^*)^5; \quad (2.2.6)$$

$$\text{Ker } \mathbf{H}^i(T, P, \vec{M}) = \text{span}(\vec{M}); \quad (2.2.7)$$

où $\mathbf{H}^i(T, P, \vec{M})$ est le hessien de $g^Z(T, P, \vec{M})$ par rapport à la variable \vec{M} .

Démonstration. On a:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{ij}^i(T, P, \vec{M}) &= \partial_{M_i} \mu_k^i(T, P, \vec{M}) \\ &= \frac{R_0 T}{W_i \sum_{k=1}^5 \frac{M_k}{W_k}} \left[\frac{\sum_{k=1}^5 \frac{M_k}{W_k}}{M_i} \delta_{ij} - \frac{1}{W_j} \right] \forall \vec{M} \in (\mathbb{R}_+^*)^5. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Montrons l'item (2.2.7). On a:

$$\sum_{j=1}^5 \frac{R_0 T}{W_i \sum_{k=1}^5 \frac{M_k}{W_k}} \left[\frac{\sum_{k=1}^5 \frac{M_k}{W_k}}{M_i} \delta_{ij} - \frac{1}{W_j} \right] M_j = 0 \quad 1 \leq i \leq 5,$$

d'où

$$\mathbf{H}^i(T, P, \vec{M}) \vec{M} = 0.$$

Supposons maintenant que:

$$\mathbf{H}^i(T, P, \vec{M}) \vec{R} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(\sum_{k=1}^5 \frac{M_k}{W_k} \right) \frac{R_i}{M_i} = \sum_{j=1}^5 \frac{R_j}{W_j} \quad 1 \leq i \leq 5. \quad (2.2.9)$$

Posons

$$R^* = \sum_{k=1}^5 \frac{R_k}{W_k} \text{ et } M^* = \sum_{k=1}^5 \frac{M_k}{W_k} > 0.$$

L'égalité (2.2.9) s'écrit alors:

$$\frac{R_i}{M_i} = \frac{R^*}{M^*} \quad 1 \leq i \leq 5,$$

donc \vec{R} et \vec{M} sont colinéaires. L'homogénéité de g^Z par rapport à \vec{M} est immédiate. Montrons que g^Z est convexe. Pour cela il suffit de vérifier que (cf Ciarlet [5] théorème 7.4.3 p. 155)

$$(\vec{Q} - \vec{M})^\top \mathbf{H}^z(T, P, \vec{M})(\vec{Q} - \vec{M}) \geq 0 \quad \forall \vec{Q}, \vec{M} \in (\mathbf{R}_+^*)^5, \vec{Q} \neq \vec{M}. \quad (2.2.10)$$

Calculons

$$(\vec{Q} - \vec{M})^\top \mathbf{H}^z(T, P, \vec{M})(\vec{Q} - \vec{M}) = R_0 T \left[\sum_{i=1}^5 \frac{(Q - M)_i^2}{M_i W_i} - \sum_{i,j=1}^5 \frac{(Q - M)_i (Q - M)_j}{W_i W_j \sum_{k=1}^5 \frac{M_k}{W_k}} \right].$$

Posons $x_i \stackrel{\text{def}}{=} (Q - M)_i$ pour $1 \leq i \leq 5$ et calculons

$$\begin{aligned} E &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^5 \sum_{k=1}^5 \frac{M_k}{W_k} \frac{x_i^2}{M_i W_i} - \sum_{i,j=1}^5 \frac{x_i x_j}{W_i W_j} = \sum_{i,k=1}^5 \frac{x_i^2}{M_i^2 W_i} \frac{M_i M_k}{W_k} - \sum_{i,k=1}^5 \frac{x_i}{M_i} \frac{x_k}{M_k} \frac{M_i M_k}{W_i W_k} \\ E &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^5 \left[\frac{x_i^2}{M_i^2} \frac{M_i M_k}{W_i W_k} - 2 \frac{x_i}{M_i} \frac{x_k}{M_k} \frac{M_i M_k}{W_i W_k} + \frac{x_k^2}{M_k^2} \frac{M_i M_k}{W_i W_k} \right] \\ E &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^5 \frac{M_i M_k}{W_i W_k} \left[\frac{x_i}{M_i} - \frac{x_k}{M_k} \right]^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

De l'inégalité (2.2.11) on déduit (2.2.10) puisque $T > 0$, $\vec{M} \in \mathbf{R}_+^5$ et les $W_k > 0$ pour $0 \leq k \leq 5$. Le lemme 2.2.2 est démontré.

□

Remarques 2.2.1.

On a $E = 0 \Leftrightarrow \vec{Q} - \vec{M} = \lambda \vec{M}$, ainsi la fonction g^Z sera strictement convexe sur les sous-ensembles convexes $B \subset (\mathbf{R}_+^*)^5$ définis par des contraintes affines, par exemple: $B \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{M} \in (\mathbf{R}_+^*)^5, B\vec{M} = \vec{C} \text{ avec } B \text{ une } 2 \times 5 \text{ matrice et } \vec{C} \in (\mathbf{R}_+^*)^2 \text{ un vecteur donné.}\}$

Nous terminons cette section en mentionnant deux propriétés que satisfont les potentiels chimiques. Nous notons \vec{M}_j le vecteur de \mathbf{R}_+^5 dont les composantes sont celles du vecteur $\vec{M} \in \mathbf{R}_+^5$ à l'exception de la $j^{\text{ième}}$:

$$\vec{M}_j \stackrel{\text{def}}{=} (M_1, \dots, M_{j-1}, M_{j+1}, \dots, M_5)^\top.$$

Lemme 2.2.3. Supposant les hypothèses HP1 i) et HP3 satisfaites, alors

$$\forall j \in \{1, \dots, 5\} \forall \mathcal{K} \subset (\mathbb{R}_+^*)^2 \times [\mathbb{R}_+^4 \setminus \vec{0}] \text{ compact et } \forall s \in \mathbb{R}, \text{ il existe } \mathcal{E}(j, \mathcal{K}, s) > 0$$

tel que si $0 < M_j < \mathcal{E}(j, \mathcal{K}, s)$ alors $\mu_j^\pm(T, P, \vec{M}) \leq s \forall (T, P, \vec{M}_j) \in \mathcal{K}$. (2.2.12)

Démonstration. Les fonctions χ_j sont continues (voir HP3), et \mathcal{K} est un domaine compact. On pose

$$E(j, s) \stackrel{\text{déf}}{=} \left[s - \max_{(T, P, \vec{M}_j) \in \mathcal{K}} \left(\chi_j(T, P) - \frac{R_0 T}{W_j} \log \left(\sum_{i \neq j, i=1}^5 \frac{M_i}{W_i} \right) \right) \right]^- \frac{W_j}{R_0 \max_{(T, P, \vec{M}_j) \in \mathcal{K}} T} +$$

$$\left[s - \max_{(T, P, \vec{M}_j) \in \mathcal{K}} \left(\chi_j(T, P) - \frac{R_0 T}{W_j} \log \left(\sum_{i \neq j, i=1}^5 \frac{M_i}{W_i} \right) \right) \right]^+ \frac{W_j}{R_0 \min_{(T, P, \vec{M}_j) \in \mathcal{K}} T}$$

où le symbole $[\cdot]^\pm$ signifie la partie positive, respectivement la partie négative de l'expression entre crochets.

On définit $\mathcal{E}(j, \mathcal{K}, s)$ par:

$$\mathcal{E}(j, \mathcal{K}, s) \stackrel{\text{déf}}{=} W_j \exp(E(j, s))$$

La croissance de la fonction log par rapport à la variable $M_j > 0$ permet d'établir l'assertion (2.2.12). Le lemme 2.2.3 est démontré

□

2.3. Equilibre chimique de l'air.

Pour des valeurs de la température, de la pression et des masses d'atomes N et O données, $(T, P, \vec{M}) \in (\mathbf{R}_+^*)^2 \times [\mathbf{R}_+^2 \setminus \vec{0}]$, on définit le vecteur $\vec{C}^z(T, P, \vec{M})$ des masses partielles à l'équilibre comme réalisant le minimum suivant:

$$g^Z(T, P, \vec{C}^z(T, P, \vec{M})) = \min_{\substack{\vec{M}' \in \mathbf{R}_+^5 \setminus \vec{0} \\ A^* \vec{M}' = \vec{M}}} g^Z(T, P, \vec{M}'). \quad (2.3.1)$$

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à l'existence, la continuité et la dérivabilité de $\vec{C}^z(T, P, \vec{M})$ lorsque $\vec{M} \in (\mathbf{R}_+^*)^2$.

Lemme 2.3.1. *Supposons les hypothèses HP1 i), HP2 et HP3 satisfaites. Si $\vec{M} \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ alors la solution $\vec{C}^z(T, P, \vec{M})$ du problème (2.3.1) existe, est unique et est caractérisée par les conditions d'optimalité suivantes (appelées loi d'action de masses):*

- i) $\vec{\mu}^z(T, P, \vec{C}^z(T, P, \vec{M}))^\top \vec{f}_j^z = 0$ pour $2 + 1 \leq j \leq 5$, où \vec{f}_j^z est défini en (2.1.4),
- ii) $A^* \vec{C}^z(T, P, \vec{M}) = \vec{M}$,
- iii) le vecteur \vec{C}^z est positif i.e

$$\vec{C}^z(T, P, \vec{M}) \in (\mathbf{R}_+^*)^5. \quad (2.3.2)$$

Démonstration. 1) Nous montrons que si \vec{C}^z existe alors il est positif. 2) Nous montrons que \vec{C}^z existe. 3) Nous donnons une caractérisation de \vec{C}^z .

1) Pour $\vec{M} \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ nous savons que $\mathcal{A}_{\vec{M}}^z \neq \emptyset$ d'après (2.1.8). Montrons que si \vec{C}^z existe alors $\vec{C}^z(T, P, \vec{M}) \notin \mathcal{B}(\mathcal{A}_{\vec{M}}^z) = \mathcal{A}_{\vec{M}}^z \cap \partial \mathbf{R}_+^5$, ce qui prouvera l'item iii). Raisonnons par l'absurde, mais auparavant établissons que:

$$\forall \vec{M} \in \mathcal{B}(\mathcal{A}_{\vec{M}}^z), \exists \vec{R} \in \text{Ker } A^* \text{ tel que } \vec{M} + \epsilon \vec{R} \in \mathcal{A}_{\vec{M}}^z \forall \epsilon \in (0, 1]. \quad (2.3.3)$$

En effet, $\exists \vec{M}^* \in \mathcal{A}_{\vec{M}}^z$ (puisque non vide) et donc $M_i^* > 0$ pour $1 \leq i \leq 5$ (voir (2.1.7)). Posons alors, $\vec{R} = \vec{M}^* - \vec{M}$, il est évident que $\vec{R} \in \text{Ker } A^*$ et de plus $\vec{M}' = \vec{M} + \epsilon \vec{R} = \vec{M} + \epsilon(\vec{M}^* - \vec{M}) = (1 - \epsilon)\vec{M} + \epsilon\vec{M}^*$ appartient bien à $\mathcal{A}_{\vec{M}}^z \forall \epsilon \in (0, 1]$.

Supposons que $\vec{C}^z(T, P, \vec{M}) \in \mathcal{B}(\mathcal{A}_{\vec{M}}^z)$. De la dérivabilité de g^Z on déduit qu'il existe θ , $0 < \theta < 1$ tel que:

$$g^Z(T, P, \vec{C}^z(T, P, \vec{M}) + \epsilon \vec{R}) - g^Z(T, P, \vec{C}^z(T, P, \vec{M})) = \epsilon \vec{\mu}^z(T, P, \theta \epsilon \vec{R} + \vec{C}^z(T, P, \vec{M}))^\top \vec{R}. \quad (2.3.4)$$

Par définition de \vec{R} (voir (2.3.3)) on a $R_j > 0$ si $M_j = 0$ (puisque $\vec{M}^* \in \mathcal{A}_{\vec{M}}^z$). Il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que $\forall \epsilon \leq \epsilon_1$ on ait $\theta \epsilon \vec{R} + \vec{C}^z(T, P, \vec{M}) \in (\mathbf{R}_+^*)^5$. Les composantes non négatives de $\vec{\mu}^z(T, P, \theta \epsilon \vec{R} + \vec{C}^z(T, P, \vec{M}))$ sont bornées, alors le comportement asymptotique de $\vec{\mu}^z$

(voir (2.2.5 i))) permet de choisir ϵ suffisamment petit tel que le membre de droite de (2.3.4) soit strictement négatif. On contredit ainsi (2.3.1) et on a montré que \tilde{C}^z est positif.

2) Montrons l'existence et l'unicité de \tilde{C}^z .

Pour $\tilde{\mathcal{M}} \in [\mathbf{R}_+^*)^2$ $\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{M}}}^z$ est un ensemble convexe fermé et borné d'après (2.1.9). Pour $T, P, \tilde{\mathcal{M}}$ fixés la restriction de g^z à $\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{M}}}^z \subset \mathbf{R}_+^5 \setminus \tilde{0}$ définit une fonction continue (voir lemme 2.2.1). Le théorème 8.2.1 de [5] fournit l'existence d'un minimum $\tilde{C}^z(T, P, \tilde{\mathcal{M}}) \in \mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{M}}}^z$. L'unicité de \tilde{C}^z est une conséquence de la stricte convexité de g^z sur $\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{M}}}^z$ (voir remarque 2.2.1).

3) Nous donnons une caractérisation de \tilde{C}^z .

La fonction g^z est dérivable dans $[\mathbf{R}_+^*)^2 \times [\mathbf{R}_+^*)^5$ (voir lemme 2.2.1), $\tilde{C}^z \in [\mathbf{R}_+^*)^5$, la contrainte est affine, la condition d'extrémalité s'exprime par: $\nabla_{\tilde{\mathcal{M}}} g^z(T, P, \tilde{C}^z)$ appartient à l'orthogonal du noyau de la matrice A^z (voir par exemple le théorème 7.2.3 de [5] p. 148 où les $\varphi_i \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^5; \mathbf{R})$ sont définies par $\varphi_i(\vec{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^5 A_{ij} v_j - \mathcal{M}_i$, $1 \leq i \leq 2$). C'est ce qu'exprime l'item i). Le lemme 2.3.1 est démontré.

□

Concernant la régularité de \tilde{C}^z on a le résultat suivant:

Lemme 2.3.2. *Supposons les hypothèses HP1 i), HP2 et HP3 satisfaites. Si $\tilde{\mathcal{M}} \in [\mathbf{R}_+^*)^2$ alors \tilde{C}^z défini par (2.3.1) vérifie: $\tilde{C}^z(T, P, \tilde{\mathcal{M}}) \in C^1([\mathbf{R}_+^*)^2 \times [\mathbf{R}_+^*)^2; [\mathbf{R}_+^*)^5$).*

Démonstration. On définit les fonctions de classe C^1 suivantes:

$$\begin{aligned} \tilde{G} : [\mathbf{R}_+^*)^2 \times [\mathbf{R}_+^*)^2 \times [\mathbf{R}_+^*)^5 &\longrightarrow \mathbf{R}^5 \\ T, P, \tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{M}} &\longrightarrow \tilde{G}(T, P, \tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{M}}) \\ \text{où } G_k(T, P, \tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{M}}) &\stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{f}_{k+2}^z)^\top \tilde{\mu}^z(T, P, \tilde{\mathcal{M}}) \text{ pour } k = 1, 2, 3; \\ G_k(T, P, \tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{M}}) &\stackrel{\text{def}}{=} (A^z \tilde{\mathcal{M}} - \tilde{\mathcal{M}})_{k-3} \text{ pour } k = 4, 5; \\ \tilde{G} : [\mathbf{R}_+^*)^2 \times [\mathbf{R}_+^*)^2 \times [\mathbf{R}_+^*)^5 &\longrightarrow [\mathbf{R}_+^*)^2 \times [\mathbf{R}_+^*)^2 \times \mathbf{R}^5 \\ T, P, \tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{M}} &\longrightarrow (T, P, \tilde{\mathcal{M}}, \tilde{G}(T, P, \tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{M}})). \end{aligned}$$

Pour démontrer le résultat de régularité pour \tilde{C}^z , nous utilisons le théorème des fonctions implicites pour la fonction \tilde{G} , puisque le système constitué par: (2.3.2) i) et (2.3.2) ii) est équivalent à $\tilde{G}(T, P, \tilde{\mathcal{M}}, \tilde{C}^z) = \tilde{0}$. Pour tout $T, P, \tilde{\mathcal{M}} \in [\mathbf{R}_+^*)^2 \times [\mathbf{R}_+^*)^5$, un calcul simple permet d'écrire, la matrice jacobienne $\mathbf{J}(T, P, \tilde{\mathcal{M}})$ de \tilde{G} par rapport à $\tilde{\mathcal{M}}$ sous la forme:

$$\mathbf{J}(T, P, \tilde{\mathcal{M}}) = \begin{pmatrix} F \cdot \mathbf{H}^z(T, P, \tilde{\mathcal{M}}) \\ A^z \end{pmatrix}, \text{ matrice } 5 \times 5$$

où F représente la matrice 3×5 suivante:

$$\begin{pmatrix} (\tilde{f}_3^z)^\top \\ (\tilde{f}_5^z)^\top \end{pmatrix}.$$

Etudions la régularité de $\mathbf{J}(T, P, \vec{M})$ lorsque $\vec{M} \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}^z \cap (\mathbf{R}_+^*)^5$. Soit $\vec{y} \in \mathbf{R}^5$ tel que

$$\mathbf{J}(T, P, \vec{M})\vec{y} = 0. \quad (2.3.5)$$

L'ensemble $\{\vec{f}_3^z, \vec{f}_4^z, \vec{f}_5^z\}$ forme une base de $\text{Ker } A^z$, donc (2.3.5) se réduit à:

$$\vec{y} \in \text{Ker } A^z \text{ et } \mathbf{H}^z(T, P, \vec{M})\vec{y} \text{ est orthogonal à } \text{Ker } A^z. \quad (2.3.6)$$

Soit encore,

$$\vec{y} \in \text{Ker } A^z \text{ et } \vec{y}^\top \mathbf{H}^z(T, P, \vec{M})\vec{y} = 0,$$

d'où l'on déduit (en développant sur la base des vecteurs propres), puisque \mathbf{H}^z est semi-définie positive:

$$\vec{y} \in \text{Ker } A^z \text{ et } \mathbf{H}^z(T, P, \vec{M})\vec{y} = 0.$$

Le lemme 2.2.2 item (2.2.7) fournit: $\vec{y} \in \text{span}(\vec{M})$ mais comme $\vec{M} \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}^z$ et que $\vec{M} \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ on a $\text{span}(\vec{M}) \cap \text{Ker } A^z = \{\vec{0}\}$ d'où $\vec{y} = \vec{0}$. Ainsi la matrice $\mathbf{J}(T, P, \vec{M})$ est régulière pour tout $T, P, \vec{M} \in [\mathbf{R}_+^*]^2 \times [\mathbf{R}_+^*]^5$.

Montrons que la fonction \vec{G} est une fonction injective. Pour cela il suffit de vérifier que pour $\vec{M}_1, \vec{M}_2 \in (\mathbf{R}_+^*)^5$ on a:

$$\vec{G}(T, P, \vec{M}, \vec{M}_1) = \vec{G}(T, P, \vec{M}, \vec{M}_2) \Rightarrow \vec{M}_1 = \vec{M}_2.$$

La relation $\vec{G}(T, P, \vec{M}, \vec{M}_1) = \vec{G}(T, P, \vec{M}, \vec{M}_2)$ se traduit par: $\vec{M}_1 - \vec{M}_2 \in \text{Ker } A^z$ et par:

$$(\vec{f}_k)^\top \left[\int_0^1 \mathbf{H}^z(T, P, s\vec{M}_1 + (1-s)\vec{M}_2)(\vec{M}_1 - \vec{M}_2) ds \right] = 0 \quad k = 3, 4, 5.$$

Les vecteurs $\{\vec{f}_3, \vec{f}_4, \vec{f}_5\}$ engendrent $\text{ker } A^z$ et $\vec{M}_1 - \vec{M}_2 \in \text{Ker } A^z$, on a donc :

$$\int_0^1 (\vec{M}_1 - \vec{M}_2)^\top \mathbf{H}^z(T, P, s\vec{M}_1 + (1-s)\vec{M}_2)(\vec{M}_1 - \vec{M}_2) ds = 0,$$

et comme \mathbf{H}^z est semi-définie positive, on a:

$$(\vec{M}_1 - \vec{M}_2)^\top \mathbf{H}^z(T, P, s\vec{M}_1 + (1-s)\vec{M}_2)(\vec{M}_1 - \vec{M}_2) = 0 \quad \forall s \in [0, 1].$$

Si $\vec{M}_1 \neq \vec{M}_2$ on en déduit puisque \mathbf{H}^z est semi-définie positive:

$$\mathbf{H}^z(T, P, \frac{1}{2}(\vec{M}_1 + \vec{M}_2))(\vec{M}_1 - \vec{M}_2) = 0.$$

On déduit alors de l'item (2.2.7), qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\frac{1}{2}(\vec{M}_1 + \vec{M}_2) = \lambda(\vec{M}_1 - \vec{M}_2),$$

d'où $\vec{M}_1 = \vec{0}$ ou $\vec{M}_2 = \vec{0}$, ce qui n'est pas possible puisque $\vec{M}_1, \vec{M}_2 \in [\mathbb{R}_+^*]^5$. La fonction $\tilde{\mathcal{G}}$ est injective sur son domaine de définition.

Si on note $\mathbf{I}_{\mathbb{R}^4}$ l'opérateur identité de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^4 , et $\mathbf{K}(T, P, \vec{\mathcal{M}}, \vec{M})$ la matrice jacobienne de $\tilde{\mathcal{G}}$ par rapport aux variables $T, P, \vec{\mathcal{M}}$, il est immédiat de vérifier que la matrice jacobienne de la fonction $\tilde{\mathcal{G}}$ par rapport aux variables $T, P, \vec{\mathcal{M}}, \vec{M}$ s'écrit:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^4} & 0 \\ \mathbf{K}(T, P, \vec{\mathcal{M}}, \vec{M}) & \mathbf{J}(T, P, \vec{M}) \end{pmatrix},$$

et représente une application régulière de \mathbb{R}^9 dans \mathbb{R}^9 pour tout point du domaine de définition de $\tilde{\mathcal{G}}$.

On peut alors appliquer le théorème 1 p. 93 de [4], qui fournit: $\tilde{\mathcal{G}}$ est un difféomorphisme de son domaine de définition sur son image, d'où $(T, P, \vec{\mathcal{M}}, \vec{C}^z) = \tilde{\mathcal{G}}^{-1}(T, P, \vec{\mathcal{M}}, \vec{0})$, et donc \vec{C}^z est de classe C^1 sur $[\mathbb{R}_+^*]^2 \times [\mathbb{R}_+^*]^2$. Le lemme 2.3.1 est démontré.

□

Pour terminer cette section, nous donnons deux propriétés concernant les taux de production des espèces, à savoir: $\vec{\Omega}^z(T, P, \vec{M}) \in C^1([\mathbb{R}_+^*]^2 \times [\mathbb{R}_+^* \setminus \vec{0}])$, et $\Omega_k^z(T, P, \vec{M})$ est positif lorsque $M_k = 0$.

Lemme 2.3.3. *Supposons les hypothèses HP1 i), HP1 ii), HP2 et HP3 satisfaites. Alors le T.P.M.E $\vec{\Omega}^z$ vérifie:*

$$\vec{\Omega}^z(T, P, \vec{M}) \in C^1([\mathbb{R}_+^*]^2 \times [\mathbb{R}_+^* \setminus \vec{0}]).$$

De plus $\vec{\Omega}^z$ appartient à l'espace des réactions chimiques ($\vec{\Omega}^z \in \text{Ker } A^z$).

Démonstration. Considérant l'expression (2.0.36) de $\vec{\Omega}^z$, la régularité de $\vec{\Omega}^z$ est alors une conséquence de l'hypothèse HP3 et de la propriété (2.2.5) ii) du lemme 2.2.2. Par ailleurs, on peut vérifier que les vingt et un vecteurs-réaction $\{\vec{R}_j\}_{j=1}^{21}$ (définis à la section 2.0 p. 22) appartiennent au noyau de $\text{ker } A^z$. A partir de l'expression (2.0.36) de $\vec{\Omega}^z$ on en déduit $\vec{\Omega}^z \in \text{ker } A^z$. Le lemme 2.3.3 est démontré.

□

Remarque 2.3.1

$\vec{\Omega}^z \in \text{Ker } A^z$, traduit la conservation des atomes.

Lemme 2.3.4. *Supposons les hypothèses HP1 i), HP1 ii), HP2 et HP3 satisfaites. Alors $\forall (T, P, \vec{M}) \in ([\mathbb{R}_+^*]^2 \times [\mathbb{R}_+^* \setminus \vec{0}])$ tel que $M_i = 0$ on a:*

$$\Omega_i^z(T, P, \vec{M}) > 0 \text{ pour tout } i, 1 \leq i \leq 5.$$

Démonstration. Nous introduisons les notations suivantes:

$$\forall \vec{M} \in \mathbf{R}_+^5, K(\vec{M}) = \{j; 1 \leq j \leq 5 \text{ tel que } M_j > 0\}$$

Pour \vec{M} fixé on définit la partition $\rho(\vec{M}), \rho_-(\vec{M}), \rho_+(\vec{M}), \rho_{\pm}(\vec{M})$ de $\{1, \dots, 21\}$ par:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{M}) &= \{j \in \{1, \dots, 21\} \mid K(\vec{R}_j^+) \not\subseteq K(\vec{M}) \text{ et } K(\vec{R}_j^-) \not\subseteq K(\vec{M})\} \\ \rho_+(\vec{M}) &= \{j \in \{1, \dots, 21\} \mid K(\vec{R}_j^+) \subseteq K(\vec{M}) \text{ et } K(\vec{R}_j^-) \not\subseteq K(\vec{M})\} \\ \rho_-(\vec{M}) &= \{j \in \{1, \dots, 21\} \mid K(\vec{R}_j^+) \not\subseteq K(\vec{M}) \text{ et } K(\vec{R}_j^-) \subseteq K(\vec{M})\} \\ \rho_{\pm}(\vec{M}) &= \{j \in \{1, \dots, 21\} \mid K(\vec{R}_j^+) \subseteq K(\vec{M}) \text{ et } K(\vec{R}_j^-) \subseteq K(\vec{M})\} \end{aligned}$$

L'ensemble $\rho(\vec{M})$ contient les indices des vecteurs-réaction utilisant des espèces qui ne sont pas présentes dans le vecteur \vec{M} , $\rho_{\pm}(\vec{M})$ contient les indices des vecteurs-réaction utilisant des espèces qui sont présentes dans le vecteur \vec{M} , et ainsi de suite pour ρ_+ , ρ_- .

Il est immédiat de voir d'après la définition de A^z (cf (2.1.1)) que si $\vec{M} \in \mathbf{R}_+^5$ est tel que $A^z \vec{M} \in (\mathbf{R}_+^*)^2$, alors toutes les espèces atomiques sont présentes, éventuellement comme constituant d'une espèce moléculaire. On peut vérifier que si $\vec{M} \in \mathbf{R}_+^5$ est tel que $A^z \vec{M} \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ avec $M_i = 0$, alors il existe une réaction (c'est-à-dire un vecteur \vec{R}_j) qui produit de l'espèce i à partir d'une composante non nulle de \vec{M} . Traitons par exemple le cas d'un vecteur \vec{M} donné par: $\vec{M} \stackrel{\text{def}}{=} (0, 0, 0, 0, 1)^T$. A partir d'un tel vecteur peut-on produire les espèces z_k pour $k \in \{1, \dots, 4\}$. La réaction (2.0.24) permet de produire les espèces $z_1 = N, z_2 = O$ avec un tel \vec{M} , et la réaction (2.0.28) permet de produire les espèces $z_3 = N_2, z_4 = O_2$. Nous résumons ces propriétés par:

Soit $\vec{M} \in \mathbf{R}_+^5$ tel que $A^z \vec{M} \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ et soit $i \in \{1, \dots, 5\} \setminus K(\vec{M})$, alors

$$\begin{cases} \text{soit il existe } j(i) \in \rho_+(\vec{M}) \text{ tel que } R_{j(i)}^- > 0, \\ \text{soit il existe } j(i) \in \rho_-(\vec{M}) \text{ tel que } R_{j(i)}^+ > 0. \end{cases} \quad (2.3.7)$$

La propriété (2.2.5) i) nous permet d'écrire le T.P.M.E $\tilde{\Omega}^z(T, P, \vec{M})$ sous la forme:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}^z(T, P, \vec{M}) &= \sum_{j \in \rho_+(\vec{M})} H_j(T, P) \exp\left(\frac{\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^T \vec{R}_j^+}{R_0 T}\right) [-\vec{R}_j^+ + \vec{R}_j^-] + \\ &\quad \sum_{j \in \rho_-(\vec{M})} H_j(T, P) \exp\left(\frac{\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^T \vec{R}_j^-}{R_0 T}\right) [\vec{R}_j^+ - \vec{R}_j^-] + \\ &\quad \sum_{j \in \rho_{\pm}(\vec{M})} H_j(T, P) \left[\exp\left(\frac{\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^T \vec{R}_j^-}{R_0 T}\right) - \exp\left(\frac{\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^T \vec{R}_j^+}{R_0 T}\right) \right] [\vec{R}_j^+ - \vec{R}_j^-] \\ &\quad \forall (T, P, \vec{M}) \in (\mathbf{R}_+^*)^2 \times [\mathbf{R}_+^N \setminus \vec{0}]. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

L'ensemble $\rho(\vec{M})$ n'intervient pas dans la formule (2.3.8) puisque $\mu_i^z(T, P, \vec{M}) = -\infty$ pour $M_i = 0$. Soit \vec{M} tel que $M_i = 0$, d'après (2.3.7) il existe $j(i) \in \rho_+(\vec{M})$ tel que $R_{j(i),i}^- > 0$ ou il existe $j(i) \in \rho_-(\vec{M})$ tel que $R_{j(i),i}^+ > 0$. Pour un tel \vec{M} , l'expression (2.3.8), se réécrit :

$$\Omega_i^z(T, P, \vec{M}) = \sum_{j \in \rho_+(\vec{M})} H_j(T, P) \exp\left(\frac{\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \vec{R}_j^+}{R_0 T}\right) R_{j,i}^- + \sum_{j \in \rho_-(\vec{M})} H_j(T, P) \exp\left(\frac{\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \vec{R}_j^-}{R_0 T}\right) R_{j,i}^+. \quad (2.3.9)$$

En effet, d'après la définition de $\rho_\pm(\vec{M})$ la troisième somme de (2.3.8) ne contribue pas car $R_{j,i}^- = R_{j,i}^+ = 0$ pour $j_i \in \rho_\pm(\vec{M})$. Comme $R_{j(i),i}^-$ ou $R_{j(i),i}^+$ sont positifs, la propriété $H_j(T, P) \in \mathbb{R}_+^*$ induit la positivité de (2.3.9). Le lemme 2.3.4 est démontré.

□

Remarque 2.3.2.

On peut simplifier quelque peu la cinétique chimique en ne considérant que les dix-sept réactions (2.0.10), ..., (2.0.26). Dans ce cas, la propriété (2.3.7) n'est plus vérifiée. On peut néanmoins montrer que: pour tout $\vec{M} \in \mathbb{R}_+^5$, $A^z \vec{M} \in (\mathbb{R}_+^*)$, tel que $M_i = 0$, on a: $\Omega_i^z(T, P, \vec{M}) \geq 0$, ce qui signifie que si une espèce disparaît on ne peut plus en détruire. La propriété (2.3.7) sert de critère pour choisir l'ensemble des réactions que l'on doit conserver pour construire un modèle admissible.

2.4. Une inégalité de stabilité.

Dans cette dernière section, nous établissons une inégalité reliant le T.P.M.E $\bar{\Omega}$ défini en (2.0.36), les potentiels chimiques μ_k définis en (2.0.32) ou en (2.2.4) et l'enthalpie libre g^Z définie en (2.2.2). Auparavant, nous rappelons un résultat concernant les valeurs propres d'une famille d'opérateurs linéaires.

Soit un opérateur linéaire continu $\mathbf{T}(\xi_1, \dots, \xi_7)$ de \mathbb{R}^5 dans \mathbb{R}^5 ($\mathbf{T}(\xi_1, \dots, \xi_7) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5; \mathbb{R}^5)$) dont les coefficients sont des fonctions continues des variables réelles ξ_1, \dots, ξ_7 . On note $\left\{ \lambda_n(\xi_1, \dots, \xi_7) \right\}_{n=1}^5$ les valeurs propres de \mathbf{T} , répétées suivant leur multiplicité algébrique, alors on a le résultat suivant:

Lemme 2.4.1. Soit I_1, \dots, I_7 sept intervalles réels et soit $\mathbf{T}(\xi_1, \dots, \xi_7) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5; \mathbb{R}^5)$ un opérateur dont les coefficients sont des fonctions continues des variables $(\xi_1, \dots, \xi_7) \in I_1 \times \dots \times I_7$. Alors il existe cinq fonctions $\lambda_j(\xi_1, \dots, \xi_7)$ pour $j = 1, \dots, 5$ continues sur $I_1 \times \dots \times I_7$ dont les valeurs aux points ξ_1, \dots, ξ_7 représentent les valeurs propres, répétées suivant leur multiplicité algébrique, de l'opérateur $\mathbf{T}(\xi_1, \dots, \xi_7)$.

Pour une démonstration de ce résultat voir le théorème 5.2 p. 126 de Kato [10] et son extension au cas de plusieurs paramètres au paragraphe 7 p.133.

Soit F un sous-ensemble fermé de $(\mathbb{R}_+^*)^2$, on a alors le résultat suivant:

Théorème 2.4.1. Supposons les hypothèses HP1 i), HP1 ii), HP2 et HP3 satisfaites. Alors pour tout sous-ensemble compact \mathcal{B} de $F \times (\mathbb{R}_+^*)^2$, il existe une constante $k(\mathcal{B}) > 0$ telle que:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}^Z(T, P, \vec{M})^\top \vec{\mu}^Z(T, P, \vec{M}) &\leq -k(\mathcal{B}) \{g^Z(T, P, \vec{M}) - g^Z(T, P, \vec{C}^Z(T, P, A^Z \vec{M}))\} \\ \forall (T, P, \vec{M}) &\in F \times (\mathbb{R}_+^*)^5 \text{ avec } (T, P, A^Z \vec{M}) \in \mathcal{B}. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Avant de donner la démonstration du théorème 4.2.1, introduisons quelques notations qui nous seront utiles par la suite.

Soit K le sous-ensemble de $F \times (\mathbb{R}_+^*)^5$ défini par:

$$K \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{(T, P, \vec{M}) \in F \times (\mathbb{R}_+^*)^5 \text{ tels que } (T, P, A^Z \vec{M}) \in \mathcal{B}\}.$$

Pour tout $(T, P, \vec{M}) \in K$, (T, P) appartiennent à un borné de F et $A^Z \vec{M}$ appartient à un borné de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ donc d'après (2.1.9) le vecteur \vec{M} appartient à un ensemble borné de \mathbb{R}_+^5 . L'ensemble K est borné.

On définit K_{eq} le sous-ensemble de K suivant:

$$K_{eq} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{(T, P, \vec{M}) \in K \text{ tels que } \vec{M} = \vec{C}^Z(T, P, A^Z \vec{M})\}, \quad (2.4.3)$$

où \vec{C}^z est défini par (2.3.1).

Soit la fonction f définie par:

$$\begin{aligned} f : K \setminus K_{eq} &\rightarrow \mathbf{R} \\ (T, P, \vec{M}) &\mapsto f(T, P, \vec{M}) \text{ qui a pour expression:} \\ f(T, P, \vec{M}) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{\Omega}^z(T, P, \vec{M})^\top \vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})}{g^z(T, P, \vec{M}) - g^z(T, P, \vec{C}^z(T, P, A^z \vec{M}))}. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

La fonction f est continue sur son domaine (voir lemme 2.2.1 et lemme 2.3.3).

Donnons maintenant le principe de la démonstration du théorème 4.2.1. Nous montrons que f est minorée par une constante négative et que $\vec{\Omega}^z$ est orthogonal à $\vec{\mu}^z$ sur K_{eq} .

Auparavant, commençons par introduire une partition de K et par donner quelques propriétés que vérifie le bord de l'ensemble K .

Le sous-ensemble K_{eq} peut se caractériser comme l'image de \mathcal{B} par l'application Λ :

$$\begin{aligned} \Lambda : F \times (\mathbf{R}_+^*)^2 &\rightarrow F \times (\mathbf{R}_+^*)^5 \\ (T, P, \vec{M}) &\mapsto (T, P, \vec{C}^z(T, P, \vec{M})) \end{aligned}$$

où \vec{C}^z est le vecteur des masses partielles à l'équilibre, solution de (2.3.1). On a:

$$K_{eq} = \Lambda(\mathcal{B}). \quad (2.4.5)$$

La continuité de l'application (voir lemme 2.3.2 et lemme 2.2.1):

$$(T, P, \vec{M}) \mapsto \|\vec{\mu}^z(T, P, \vec{C}^z(T, P, \vec{M}))\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{j=1}^5 (\mu_j^z(T, P, \vec{C}^z(T, P, \vec{M})))^2},$$

et la compacité de \mathcal{B} fournissent l'existence de

$$\rho_0 > 0 \text{ tel que } \|\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})\|_2 \leq \frac{1}{2}\rho_0 \quad \forall (T, P, \vec{M}) \in K_{eq}. \quad (2.4.6)$$

Nous définissons maintenant D_{ρ_0} par:

$$D_{\rho_0} \stackrel{\text{def}}{=} \{(T, P, \vec{M}) \in K \text{ tels que } \|\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})\|_2 \leq \rho_0\}. \quad (2.4.7)$$

L'item (2.2.2) du lemme 2.2.3 et la propriété: D_{ρ_0} est borné impliquent que $\overline{D_{\rho_0}}$, la fermeture de l'enveloppe convexe de D_{ρ_0} satisfait: $\overline{D_{\rho_0}}$ est un sous-ensemble compact de $F \times (\mathbf{R}_+^*)^5$.

Soit ΔK l'ensemble défini par:

$$\Delta K \stackrel{\text{def}}{=} \{(T, P, \vec{M}) \in F \times \partial \mathbf{R}_+^5 \text{ tels que } (T, P, A^z \vec{M}) \in \mathcal{B}\}.$$

On a $K \cup \Delta K \subset \overline{K}$, l'inclusion inverse sera vraie si nous montrons que $K \cup \Delta K$ est un ensemble fermé. Pour cela, nous écrivons:

$K \cup \Delta K = \{F \times \mathbb{R}_+^5\} \cap r^{-1}(\mathcal{B})$ où l'application r est définie par:

$$\begin{aligned} r : F \times \mathbb{R}_+^5 &\rightarrow F \times (\mathbb{R}_+)^2 \\ (T, P, \vec{M}) &\mapsto (T, P, A^z \vec{M}); \end{aligned}$$

ainsi, $K \cup \Delta K$ est l'intersection de deux ensembles fermés car l'application r est continue. On en déduit:

$$\overline{K} = K \cup \Delta K. \quad (2.4.8)$$

Finalement, nous définissons \hat{W} par:

$$\hat{W} \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{K \setminus D_{\rho_0}}, \quad (2.4.9)$$

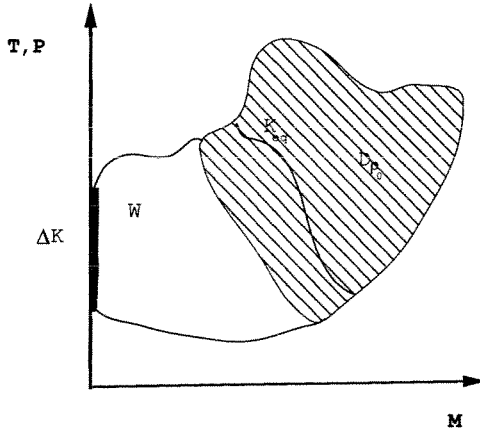
et nous posons:

$$W = \hat{W} \setminus \Delta K. \quad (2.4.10)$$

De (2.4.9), (2.4.10) et (2.4.8) on déduit:

$$K = W \cup D_{\rho_0}. \quad (2.4.11)$$

Ce qui se résume par la figure suivante:



De la définition de K_{eq} (2.4.3), de la définition de \vec{C}^z (2.3.1) et du lemme 2.3.1 on déduit:

$$g^Z(T, P, \vec{M}) - g^Z(T, P, \vec{C}^z(T, P, A^z \vec{M})) > 0 \quad \forall (T, P, \vec{M}) \in K \setminus K_{eq}, \quad (2.4.12)$$

$$g^Z(T, P, \vec{M}) - g^Z(T, P, \vec{C}^z(T, P, A^z \vec{M})) = 0 \quad \forall (T, P, \vec{M}) \in K_{eq}. \quad (2.4.13)$$

Démonstration du théorème 2.4.1. Nous allons montrer maintenant que la fonction f est minorée par une constante négative et que $\tilde{\Omega}^z$ et $\tilde{\mu}^z$ sont orthogonaux sur K_{eq} . Pour ce faire nous distinguerons le cas où $(T, P, \vec{M}) \in W$ du cas où $(T, P, \vec{M}) \in D_{\rho_0} \setminus K_{eq}$, c'est-à-dire que nous montrerons que:

$$\exists k_1 > 0 \text{ tel que } f(T, P, \vec{M}) \leq -k_1 \quad \forall (T, P, \vec{M}) \in W; \quad (2.4.14)$$

$$\tilde{\Omega}^z(T, P, \vec{M})^\top \tilde{\mu}^z(T, P, \vec{M}) = 0 \quad \forall (T, P, \vec{M}) \in K_{eq}; \quad (2.4.15)$$

$$\exists k_2 > 0 \text{ tel que } f(T, P, \vec{M}) \leq -k_2 \quad \forall (T, P, \vec{M}) \in D_{\rho_0} \setminus K_{eq}. \quad (2.4.16)$$

et ainsi en posant

$$k(\mathcal{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \min(k_1, k_2) \quad (2.4.17)$$

nous aurons prouvé l'inégalité (2.4.1) et le théorème 2.4.1 sera démontré.

Lemme 2.4.2. Soit K_{eq} le sous-ensemble de K défini par (2.4.2). Alors on a:

$$\tilde{\Omega}^z(T, P, \vec{M})^\top \tilde{\mu}^z(T, P, \vec{M}) = 0 \quad \forall (T, P, \vec{M}) \in K_{eq}.$$

Démonstration. Utilisant l'expression (2.0.36) de $\tilde{\Omega}^z$ on a:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}^z(T, P, \vec{M})^\top \tilde{\mu}^z(T, P, \vec{M}) &= \\ \sum_{j=1}^{\mathcal{L}} H_j(T, P) \exp\left(\frac{\tilde{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \tilde{R}_j^-}{R_0 T}\right) &\left[1 - \exp\left(\frac{\tilde{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \tilde{R}_j}{R_0 T}\right)\right] \tilde{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \tilde{R}_j. \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Remarquant que la fonction $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} (1 - \exp(x))x$ est une fonction négative pour $x \neq 0$ et nulle en $x = 0$, la positivité de

$$R_0 T \exp\left(\frac{\tilde{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \tilde{R}_j^-}{R_0 T}\right) H_j(T, P)$$

implique que

$$\tilde{\Omega}^z(T, P, \vec{M})^\top \tilde{\mu}^z(T, P, \vec{M}) \leq 0 \quad (T, P, \vec{M}) \in K. \quad (2.4.19)$$

Examinons le cas où

$$\tilde{\Omega}^z(T, P, \vec{M})^\top \tilde{\mu}^z(T, P, \vec{M}) = 0. \quad (2.4.20)$$

L'égalité (2.4.18) implique que

$$\tilde{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \tilde{R}_j = 0 \quad 1 \leq j \leq 21.$$

Les $\{\tilde{R}_j\}_{j=1}^{21}$ engendrent une base de l'espace des réactions chimiques (voir les vecteurs $\tilde{R}_2, \tilde{R}_7, \tilde{R}_{15}$ définis en (2.0.31)), ainsi le lemme 2.3.1 implique $\vec{M} = \vec{C}^z$. On a donc

$$\tilde{\Omega}^z(T, P, \vec{M})^\top \tilde{\mu}^z(T, P, \vec{M}) < 0 \quad \forall (T, P, \vec{M}) \in K \setminus K_{eq}; \quad (2.4.21)$$

$$\tilde{\Omega}^z(T, P, \vec{M})^\top \tilde{\mu}^z(T, P, \vec{M}) = 0 \quad \forall (T, P, \vec{M}) \in K_{eq}. \quad (2.4.22)$$

Le lemme 2.4.2 est démontrée.

□

Intéressons nous maintenant au comportement de la fonction f sur W . On a:

Lemme 2.4.3. Soit W le sous-espace de K défini par (2.4.10) et soit la fonction f définie par (2.4.4). Alors il existe une constante $k_1 > 0$ telle que:

$$f(T, P, \vec{M}) \leq -k_1 \quad \forall (T, P, \vec{M}) \in W.$$

Démonstration. Tout d'abord remarquons que les inégalités (2.4.21) et (2.4.12) impliquent que f est négative dans $K \setminus K_{eq}$ et donc dans W . Raisonnons ab absurdo, et nions (2.4.14):

$$\begin{aligned} \exists \left\{ T_n, P_n, \vec{M}_n \right\}_{n \geq 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \{T, P, \vec{M}\} \in \partial W \text{ et} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(T_n, P_n, \vec{M}_n) \geq 0. \end{aligned}$$

La continuité de f sur $W \cap K$, et les propriétés (2.4.21) et (2.4.12) (i.e $(T, P, \vec{M}) \notin \overline{D_{\rho_0}}$) impliquent que $(T, P, \vec{M}) \notin \overline{W} \cap K$. Les points de ∂W qui ne sont pas dans K sont dans ΔK . On a:

$$\begin{aligned} \exists \left\{ T_n, P_n, \vec{M}_n \right\}_{n \geq 0} \in W, \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n, P_n, \vec{M}_n) = (T, P, \vec{M}) \in \Delta K \\ \text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} f(T_n, P_n, \vec{M}_n) \geq 0. \end{aligned}$$

Le vecteur \vec{M} est tel que $A^z \vec{M} \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ puisque \mathcal{B} est compact et donc $\vec{M} \in \mathbb{R}_+^5 \setminus \vec{0}$. La continuité de g^z sur $F \times [\mathbb{R}_+^5 \setminus \vec{0}]$ (voir lemme 2.2.1), la continuité de $\vec{C}^z(T_n, P_n, A^z \vec{M}_n)$ (voir lemme 2.3.2) et la propriété $(T, P, \vec{M}) \notin \overline{D_{\rho_0}}$ (donc $(T, P, \vec{M}) \neq \vec{C}^z(T, P, A^z \vec{M})$) impliquent que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^z(T_n, P_n, \vec{M}_n) - g^z(T_n, P_n, \vec{C}^z(T_n, P_n, A^z \vec{M}_n)) = \beta > 0.$$

La continuité de $\vec{\Omega}^z$ (voir lemme 2.3.3), la propriété $\Omega_i^z(T, P, \vec{M}) > 0$ si $M_i = 0$ (voir lemme 2.3.4) et la propriété (2.2.5) impliquent que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_i^z(T_n, P_n, \vec{M}_n) \mu_i^z(T_n, P_n, \vec{M}_n) = -\infty,$$

pour tous les i , $1 \leq i \leq 5$ tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{n,i} = 0$. On obtient donc une contradiction avec la propriété $\lim_{n \rightarrow \infty} f(T_n, P_n, \vec{M}_n) \geq 0$. Le lemme 2.4.3 est démontré.

□

Intéressons nous maintenant au comportement de f sur D_{ρ_0} . On a:

Lemme 2.4.4. Soit K_{eq} les sous-ensembles de K et D_{ρ_0} définis par (2.4.3) et par (2.4.7), et soit f définie par (2.4.4). Alors il existe une constante $k_2 > 0$ telle que:

$$f(T, P, \vec{M}) \leq -k_2 \quad \forall (T, P, \vec{M}) \in D_{\rho_0} \setminus K_{eq}.$$

Démonstration.

- 1) on majore $(\vec{\Omega}^z)^\top \vec{\mu}^z$ en fonction de $-\|\vec{M} - \vec{C}^z\|_2^2 \quad \forall (T, P, \vec{M}) \in D_{\rho_0}$;
- 2) on estime $g^z(T, P, \vec{M}) - g^z(T, P, \vec{C}^z)$ en fonction de $\|\vec{M} - \vec{C}^z\|_2^2$.

1) Pour tout $L > 0$, on définit $a_L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - \exp(-L)}{L}$; on a:

$$(1 - \exp(x))x \leq -a_L x^2 \quad \forall x \in [-L, L].$$

Soit $k > 0$ défini par:

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \min_{1 \leq j \leq 21} \min_{(T, P, \vec{M}) \in \bar{K}} \left(\frac{H_j(T, P)}{R_0 T} \right)$$

(un tel minorant existe car les $H_j(T, P)$ sont continues et positives), soit $r > 0$ défini par:

$$r \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq j \leq 21} \max_{(T, P, \vec{M}) \in \bar{K}} \frac{1}{R_0 T} \|\vec{R}_j\|_2.$$

En posant $L \stackrel{\text{def}}{=} \rho_0 \max_{1 \leq j \leq 21} \|\vec{R}_j\|_2$, de (2.4.18) nous déduisons l'inégalité suivante:

$$\vec{\Omega}^z(T, P, \vec{M})^\top \vec{\mu}^z(T, P, \vec{M}) \leq -a_L k \exp(-\rho_0 r) \sum_{j=1}^{21} \left(\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \vec{R}_j \right)^2 \quad \forall (T, P, \vec{M}) \in D_{\rho_0}. \quad (2.4.23)$$

Soit \mathbf{P} l'opérateur de projection sur $\text{Ker } A^z$, dans la suite, nous noterons respectivement par $\vec{\mu}_{\text{Ker } A^z}^z$, $\vec{C}_{\text{Ker } A^z}^z$ les vecteurs $\mathbf{P}\vec{\mu}^z$, $\mathbf{P}\vec{C}^z$.

La famille $\{\vec{R}_j\}_{j=1}^{21}$ est une famille génératrice de $\text{Ker } A^z$, il existe donc une constante $\hat{c} > 0$ telle que:

$$\sum_{j=1}^{21} \left(\vec{\mu}^z(T, P, \vec{M})^\top \vec{R}_j \right)^2 \geq \hat{c} \|\vec{\mu}_{\text{Ker } A^z}^z(T, P, \vec{M})\|_2^2. \quad (2.4.24)$$

L'inégalité (2.4.23) devient

$$\vec{\Omega}^z(T, P, \vec{M})^\top \vec{\mu}^z(T, P, \vec{M}) \leq -C \|\vec{\mu}_{\text{Ker } A^z}^z(T, P, \vec{M})\|_2^2 \quad \forall (T, P, \vec{M}) \in D_{\rho_0}, \quad (2.4.25)$$

où $C = \hat{c} a_L k \exp(-\rho_0 r)$.

La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit:

$$\begin{aligned} \vec{\mu}^z(T, P, \vec{M}) &= \vec{\mu}^z(T, P, \vec{C}^z(T, P, A^z \vec{M})) + \\ &\int_0^1 \mathbf{H}^z(T, P, \vec{C}^z(T, P, A^z \vec{M}) + t\{\vec{M} - \vec{C}^z(T, P, A^z \vec{M})\}) dt (\vec{M} - \vec{C}^z(T, P, A^z \vec{M})). \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

On projette cette relation sur $\text{Ker } A^z$ et on utilise les lois d'action de masse (2.3.2) i), c'est-à-dire

$$\bar{\mu}_{\text{Ker } A^z}^z(T, P, \bar{C}^z(T, P, A^z \bar{M})) = \bar{0},$$

il vient:

$$\bar{\mu}_{\text{Ker } A^z}^z(T, P, \bar{M}) = \left[\int_0^1 \mathbf{H}^z(T, P, \bar{C}^z(T, P, A^z \bar{M})) + t \{ \bar{M} - \bar{C}^z(T, P, A^z \bar{M}) \} (\bar{M} - \bar{C}^z(T, P, A^z \bar{M})) dt \right]_{\text{Ker } A^z}. \quad (2.4.27)$$

Posons $\mathbf{H}^z(T, P, \bar{M}^*) = \mathbf{H}^z(T, P, \bar{C}^z(T, P, A^z \bar{M})) + t \{ \bar{M} - \bar{C}^z(T, P, A^z \bar{M}) \}$ et multiplions à gauche par $(\bar{M} - \bar{C}^z(T, P, A^z \bar{M}))$, (2.4.27) devient

$$(\bar{M} - \bar{C}^z(T, P, A^z \bar{M}))^\top \bar{\mu}_{\text{Ker } A^z}^z(T, P, \bar{M}) = (\bar{M} - \bar{C}^z(T, P, A^z \bar{M}))^\top \left[\int_0^1 \mathbf{H}^z(T, P, \bar{M}^*) (\bar{M} - \bar{C}^z(T, P, A^z \bar{M})) dt \right]_{\text{Ker } A^z}, \quad (2.4.28)$$

comme $(\bar{M} - \bar{C}^z(T, P, A^z \bar{M})) \in \text{Ker } A^z$, on a:

$$(\bar{M} - \bar{C}^z(T, P, A^z \bar{M}))^\top \bar{\mu}_{\text{Ker } A^z}^z(T, P, \bar{M}) = (\bar{M} - \bar{C}^z(T, P, A^z \bar{M}))^\top \int_0^1 \mathbf{H}^z(T, P, \bar{M}^*) (\bar{M} - \bar{C}^z(T, P, A^z \bar{M})) dt. \quad (2.4.29)$$

Nous pouvons récrire la relation (2.4.29) sous la forme:

$$(\bar{M} - \bar{C}^z(T, P, A^z \bar{M}))^\top \bar{\mu}_{\text{Ker } A^z}^z(T, P, \bar{M}) = (\bar{M} - \bar{C}^z(T, P, A^z \bar{M}))^\top \int_0^1 \mathbf{P}^\top \mathbf{H}^z(T, P, \bar{M}^*) \mathbf{P} (\bar{M} - \bar{C}^z(T, P, A^z \bar{M})) dt.$$

Pour $t \in [0, 1]$, $(T, P, \bar{M}) \in D_{\rho_0}$, on a $(T, P, \bar{M}^*) \in \hat{D}_{\rho_0}$.

D'autre part, la matrice $\mathbf{P}^\top \mathbf{H}^z(T, P, \bar{M}^*) \mathbf{P}$ est une matrice symétrique définie positive (voir lemme 2.2.2) dont les coefficients sont des fonctions continues des variables (T, P, \bar{M}^*) lorsque celles-ci parcourent \bar{D}_{ρ_0} .

Le lemme 2.4.1 fournit l'existence de $\{\lambda_j(T, P, M_1^*, \dots, M_5^*)\}$ fonctions réelles continues sur \bar{D}_{ρ_0} pour $j = 1, \dots, 5$ représentant les valeurs propres de la matrice $\mathbf{P}^\top \mathbf{H}^z(T, P, \bar{M}^*) \mathbf{P}$, répétées suivant leur multiplicité algébrique. L'application

$$(T, P, \bar{M}^*) \mapsto \min_{1 \leq j \leq 5} \lambda_j(T, P, M_1^*, \dots, M_5^*)$$

est une application continue sur \bar{D}_{ρ_0} (puisque les fonctions $\lambda_j(T, P, M_1^*, \dots, M_5^*)$ sont continues). Ainsi $\lambda_{\min}(T, P, \bar{M}^*) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{1 \leq j \leq 5} \lambda_j(T, P, M_1^*, \dots, M_5^*)$ est une application continue sur \bar{D}_{ρ_0} . On pose

$$\lambda^* \stackrel{\text{def}}{=} \min_{(T, P, \bar{M}^*) \in \bar{D}_{\rho_0}} \lambda_{\min}(T, P, \bar{M}^*).$$

Puisque la matrice $\mathbb{P}^T \mathbb{H}^z(T, P, \vec{M}^*) \mathbb{P}$ est une matrice symétrique définie positive on a $\lambda^* > 0$.

On déduit alors de (2.4.29)

$$(\vec{M} - \vec{C}^z(T, P, A^z \vec{M}))^T \vec{\mu}_{K_{er} A^z}^*(T, P, \vec{M}) \geq \lambda^* \|\vec{M} - \vec{C}^z(T, P, A^z \vec{M})\|_2^2, \quad (2.4.30)$$

$$\|\vec{\mu}_{K_{er} A^z}^*(T, P, \vec{M})\|_2 \geq \lambda^* \|\vec{M} - \vec{C}^z(T, P, A^z \vec{M})\|_2 \quad \forall (T, P, \vec{M}) \in D_{\rho_0}. \quad (2.4.31)$$

L'inégalité (2.4.25) devient:

$$\tilde{\Omega}^z(T, P, \vec{M})^T \vec{\mu}^z(T, P, \vec{M}) \leq -C(\lambda^*)^2 \|\vec{M} - \vec{C}^z(T, P, A^z \vec{M})\|_2^2 \quad \forall (T, P, \vec{M}) \in D_{\rho_0}. \quad (2.4.32)$$

2) Examinons la différence de la fonction d'enthalpie évaluée en \vec{M} et en C^z . Le développement de Taylor de la fonction g^z s'écrit:

$$\begin{aligned} g^z(T, P, \vec{M}) - g^z(T, P, \vec{C}^z(T, P, A^z \vec{M})) = \\ \frac{1}{2} (\vec{M} - \vec{C}^z(T, P, A^z \vec{M}))^T \mathbb{H}^z(T, P, \theta \vec{M} + (1 - \theta) \vec{C}^z(T, P, A^z \vec{M})) (\vec{M} - \vec{C}^z(T, P, A^z \vec{M})), \end{aligned} \quad (2.4.33)$$

où $0 < \theta < 1$. Si on note Λ^* le maximum suivant:

$$\Lambda^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(T, P, \vec{M}^*) \in \overline{D_{\rho_0}}} \max_{1 \leq j \leq 5} \lambda_j(T, P, \vec{M}^*) > 0,$$

on a:

$$g^z(T, P, \vec{M}) - g^z(T, P, \vec{C}^z(T, P, A^z \vec{M})) \leq \frac{\Lambda^*}{2} \|\vec{M} - \vec{C}^z(T, P, A^z \vec{M})\|_2^2 \quad \forall (T, P, \vec{M}) \in D_{\rho_0}. \quad (2.4.34)$$

on pose alors $k_2 = \frac{2C(\lambda^*)^2}{\Lambda^*}$ et le lemme 2.4.4 est démontré.

□

Le théorème 2.4.1 est démontré.

□

REFERENCES

1. Boillat E., *Modélisation et analyse numérique de couches limites réactives*, Thèse Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, à paraître.
2. Boillat E., Pousin J., *Écoulement réactif hors équilibre sur une plaque plane avec vitesse, température et pression données*, Rapport interne du Département de Mathématiques Ecole polytechnique Fédérale de Lausanne. (1990).
3. Callen H. B., *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*, John Wiley-Sons, 1985.
4. Choquet-Bruhat Y., Dewitt-Morette C., Dillard-Bleick M., *Analysis, Manifolds and Physics*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
5. Ciarlet Ph., *Introduction à l'analyse Numérique Matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris, 1982.

6. Gardiner Jr. W., *Combustion chemistry*, Springer-Verlag, 1980.
7. Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M., *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley, 1965.
8. Giovengigli V., *Structure et extinction de flammes laminaires prémélangées*, Thèse ès Sciences Mathématiques mention Mécanique. (1988), Université Pierre et Marie Curie Paris 6.
9. James F., *Sur la modélisation mathématique des équilibres diphasiques et des colonnes de chromatographie*, Thèse de doctorat de l'Ecole Polytechnique Spécialité Mathématiques (1990).
10. Kato T., *A short introduction to perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, 1983.
11. Kuo K., *Principles of combustion*, John Wiley-Sons, 1986.
12. Parck C., *On the convergence of computation of chemically reacting flows*, AIAA paper 85-0247 (1985), 23dr aerospace Science Meeting Reno.
13. Straub D., *Exakte gleichungen für die transportkoeffizienten eines funskomponentengemisches als modellgas dissoziiert luft*, Deutsche Luft und Raumfahrt, DLR-FB 72-34 (1972).
14. Williams F. A., *Combustion theory*, Benjamin-Cumming, 1985.

CHAPITRE 3

Estimations d'erreur pour un problème parabolique non linéaire dégénéré

Résumé. Dans ce chapitre nous considérons une équation aux dérivées partielles de type parabolique qui dégénère sur un bord du domaine. Cette équation peut être interprétée comme une modélisation de la diffusion de particules en physique des plasmas, ou encore comme une modélisation simplifiée d'une couche limite visqueuse en dimension deux. On rappelle des résultats connus d'existence et d'unicité pour la solution faible. On définit ensuite un schéma aux différences finies implicite; on obtient une estimation de l'erreur tenant compte de la régularité de la solution exacte. On donne un algorithme pour calculer la solution numérique à chaque pas de temps et on montre la convergence de cet algorithme. Mentionnons que ce travail a été réalisé en collaboration avec P. Lesaint de l'université de Besançon (voir [13]).

3.1. Introduction.

L'équation que nous nous proposons d'étudier modélise la diffusion des particules en physique des plasmas (voir Drake et al [9] équation A1), où la fonction inconnue u représente la densité de particules. Plus généralement, elle appartient à la classe d'équations qui modélisent mathématiquement les phénomènes de diffusion rapide. En effet, si l'équation est réécrite comme il est classique de le faire pour les problèmes paraboliques, en posant $v = u^2$, elle se met sous la forme: $v_t = (v^m)_{xx}$ avec $m = \frac{1}{2}$. Le coefficient devant le terme de diffusion devient infini lorsque v s'annule puisque $0 < m < 1$.

Ces équations ont été étudiées par de nombreux auteurs d'un point de vue théorique, citons par exemple: Aronson [1], Aronson et Bénilan [2], Berryman et Holland [5], Herrero et Pierre [11], Oleinik [17], Peletier [19], et Sabinina [21].

Notons que du point de vue numérique un résultat de convergence a été obtenu par Descloux pour un problème similaire, voir [8].

Le problème que nous nous proposons d'étudier du point de vue de l'approximation numérique peut être aussi considéré comme une simplification des équations de la couche limite visqueuse bidimensionnelle en mécanique des fluides. Considérant un corps plongé dans un écoulement de fluide incompressible, si on néglige les termes de transport dans la direction orthogonale au corps, l'inconnue u représente la vitesse du fluide suivant la direction tangente au corps et la variable x représente la distance au corps (voir Oleinik [16] par exemple).

Pour $T > 0$ fixé, soit Q_T le domaine $(0, 1) \times (0, T)$, le problème (P) que nous considérons s'écrit:

Trouver $u(x, t) : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ solution de:

$$\begin{array}{ll} uu_t - u_{xx} = 0 & \text{dans } Q_T; \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{dans } (0, 1); \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = u_1(t) & \text{dans } (0, T). \end{array}$$

Le problème (P) est un problème parabolique non linéaire qui dégénère dans un voisinage d'une partie du bord de Q_T (la partie où u s'annule). Le but de ce travail est d'obtenir des estimations d'erreur lorsque le problème (P) est approché par une méthode de différences finies.

A la section 2, nous rappelons un théorème d'existence et d'unicité de la solution (dans un sens à préciser) du problème (P), nous donnons un schéma de la démonstration de ce théorème et nous nous intéressons à la régularité de u_t dans le cas particulier où $u_1 = 1$.

A la section 3 le problème (P) est approché par une méthode de différences finies implicite en temps. Nous montrons l'existence et la stabilité de la solution approchée ainsi définie, puis, en adaptant une technique développée pour le problème de Stefan par R. Nochetto [15], nous établissons une majoration d'erreur entre la solution exacte u et la solution approchée U , à savoir:

$$\|U - u\|_{L^2(Q_T)} \leq C\left(\frac{\tau}{h} + h^{\frac{1}{2}}\right),$$

où τ et h représentent respectivement les pas de la discrétisation en temps et en espace. Le terme en $\frac{1}{h}$ présent dans cette majoration provient de la dégénérescence du problème dans un voisinage de $x = 0$.

A la section 4, nous définissons un algorithme permettant de calculer la solution du problème approché à chaque pas de temps, et nous montrons la convergence de cet algorithme.

Enfin à la section 5, nous donnons quelques généralisations possibles des résultats obtenus pour ce problème dans les cas où le terme uu_t est remplacé par $u^{p-1}u_t$, $p \geq 2$, et (ou) la dimension d'espace $n = 2$.

3.2. Existence et unicité de solutions du problème continu P.

Le résultat d'existence et d'unicité de solutions en un sens faible du problème (P) que nous donnons a été démontré dans Sabinina [21] et dans Oleinik et al [18] par exemple. Pour des raisons d'exhaustivité et de clarté nous rappelons succinctement la démarche de la démonstration. Remarquons que d'autres résultats d'existence et d'unicité de solutions du problème (P) en un sens plus faible ($u(x, t)$ n'est pas continue sur $\overline{Q_T}$ mais $C^0(0, T; L^1(0, 1))$) ont été obtenus dans [2], [3], [19], [11]. Nous donnons d'abord les définitions des espaces fonctionnels que nous utiliserons et la définition d'une solution faible, puis nous énonçons le théorème d'existence.

Soit $V_2^{1,0}(Q_T)$ et $W_2^{1,1}(Q_T)$ les espaces définis par:

$$\begin{aligned} V_2^{1,0}(Q_T) &\stackrel{\text{def}}{=} C^0(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H^1(0, 1)) \\ W_2^{1,1}(Q_T) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in H^1(Q_T); \quad \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0, \quad 0 < t < T; \\ &\quad \varphi(x, T) = 0, \quad 0 < x < 1\}. \end{aligned}$$

Soit D un ouvert de \mathbf{R}^n , $n = 1$ ou $n = 2$, $C^0(\overline{D})$ désigne l'espace de Banach constitué des fonctions continues sur \overline{D} muni de la norme du supremum.

Maintenant précisons les hypothèses que nous supposons satisfaites concernant les données du problème (P).

HP1 u_0 et u_1 sont respectivement de classe C^1 sur $[0, 1]$ et sur $[0, T]$.

HP2 $u_1(0) = u_0(1)$, $u_0(0) = 0$.

HP3 u_0 et u_1 sont des fonctions non négatives, de plus $\exists \beta > 0$ tel que $u_0(x) \geq \beta x$, pour $0 \leq x \leq 1$, et $u_1(t) \geq \beta$ pour $0 \leq t \leq T$.

Avant de donner la définition d'une solution faible pour le problème (P), rappelons que si une fonction ψ appartient à l'espace $V_2^{1,0}(Q_T)$ alors ψ appartient en particulier à l'espace $L^4(Q_T)$. De même, si une fonction ψ appartient à l'espace $W_2^{1,1}(Q_T)$ alors ψ appartient à l'espace $C^0(0, T; L^2(0, 1))$. Nous pouvons maintenant définir une solution faible du problème (P) par:

Définition 3.2.1. La fonction $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$ est dite solution faible du problème (P) si:

$$\begin{aligned} \int_0^1 -u_0^2(x)\varphi(x, 0) dx + \int_{Q_T} [2u_x(x, t)\varphi_x(x, t) - u^2(x, t)\varphi_t(x, t)] dx dt = 0 \\ \forall \varphi \in W_2^{1,1}(Q_T); \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = u_1(t), \quad 0 < t < T. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section sous la forme du théorème suivant:

Théorème 3.2.1. Supposons les hypothèses *HP1*, *HP2* et *HP3* satisfaites. Alors le problème (P) admet une unique solution faible $u \in V_2^{1,0}(Q_T) \cap L^2(0, T; H^2(0, 1))$ qui vérifie de plus:

- (i) $u \in C^0(\overline{Q_T}) \cap L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(0, 1))$.
- (ii) $\int_z^1 \int_0^T (u_t)^2 dx dt \leq \frac{C}{z} \quad \forall z, \quad 0 < z < 1$, où la constante C est indépendante de z .
- (iii) $u(x, t) \geq \beta x$ dans $\overline{Q_T}$ où β est définie par l'hypothèse *HP3*.

La démonstration du théorème 3.2.1 se fait en plusieurs étapes, et utilise une technique de régularisation due à Oleinik, associée au théorème de point fixe de Leray-Schauder (voir [21] et [18]).

- (1) On introduit une suite de problèmes perturbés (P^ϵ) qui ne sont pas dégénérés, et qui sont bien posés.
- (2) On établit des estimations a priori pour les solutions des problèmes (P^ϵ).
- (3) On montre en passant à la limite lorsque ϵ tend vers zéro que la suite des solutions des problèmes perturbés converge vers une solution faible du problème (P).

Nous reviendrons plus tard sur la démonstration du théorème 3.2.1. Pour l'instant, nous nous intéressons aux problèmes perturbés (P^ϵ).

Pour tout ϵ tel que $0 < \epsilon \leq 1$ on définit le problème (P^ϵ) par:

Trouver $u^\epsilon \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\overline{Q_T})$ qui vérifie:

$$(u^\epsilon + \epsilon)u_t^\epsilon = u_{xx}^\epsilon \quad \text{dans } Q_T; \quad (3.2.1)$$

$$u^\epsilon(x, 0) = u_0(x), \quad \text{dans } (0, 1); \quad (3.2.2)$$

$$u^\epsilon(0, t) = 0, \quad u^\epsilon(1, t) = u_1(t) \quad \text{dans } (0, T). \quad (3.2.3)$$

Concernant l'existence et l'unicité de solutions des problèmes (P^ϵ) nous avons le résultat suivant:

Lemme 3.2.1. Supposons que les hypothèses *HP1*, *HP2* et *HP3* sont satisfaites. Alors pour tout ϵ donné tel que $0 < \epsilon \leq 1$, le problème (P^ϵ) admet une unique solution u^ϵ non négative. De plus cette solution vérifie les estimations suivantes:

$$i) \sup_{\overline{Q_T}} |u^\epsilon| \leq C, \text{ et } ii) \sup_{\overline{Q_T}} |u_x^\epsilon| \leq C_1,$$

où les constantes C et C_1 ne dépendent pas de ϵ mais dépendent de $\|u_0\|_{C^1([0,1])}$ et de $\|u_1\|_{C^1([0,T])}$. En outre, $u^\epsilon \in H^1(Q_T) \cap L^2(0, T; H^2(0, 1))$.

Démonstration. Pour l'existence de $u^\epsilon \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\overline{Q_T})$ et pour les estimations i) et ii) nous nous référons à [21] p. 495 et à [18].

Intéressons nous maintenant à la régularité de u^ϵ . Si on définit v^ϵ par

$$v^\epsilon(x, t) = u^\epsilon(x, t) - xu_1(t) \quad \forall (x, t) \in \overline{Q_T},$$

on vérifie immédiatement que $v^\epsilon \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\overline{Q}_T)$ et que v^ϵ vérifie les équations suivantes:

$$\begin{aligned} (u^\epsilon + \epsilon)v_t^\epsilon &= v_{xx}^\epsilon - (xu_1')(u^\epsilon + \epsilon) && \text{dans } Q_T; \\ v^\epsilon(x, 0) &= u_0(x) - xu_1(0) && \text{dans } (0, 1); \\ v^\epsilon(0, t) &= 0 = v^\epsilon(1, t) && \text{dans } (0, T). \end{aligned}$$

En posant $\alpha(x, t) = u^\epsilon(x, t) + \epsilon$; $a_{11}(x, t) = 1$; $\psi_0(x) = u_0(x) - xu_1(0)$; et $\mathcal{F}(x, t) = -(xu_1'(t))(u^\epsilon + \epsilon)(x, t)$, $\forall (x, t) \in Q_T$, on peut alors utiliser la remarque 6.2 de Ladyzen-skaya-Solonnikov-Uralceva [12] p.178 qui affirme que le problème précédent a une unique solution dans $H^1(Q_T)$. On a donc $v^\epsilon \in H^1(Q_T)$. On en déduit que $v_{xx}^\epsilon \in L^2(Q_T)$ puisque les fonctions xu_1' et $(u^\epsilon + \epsilon)$ sont dans $L^\infty(Q_T)$. Il est immédiat de conclure que $u^\epsilon \in H^1(Q_T) \cap L^2(0, T; H^2(0, 1))$.

□

Nous établissons maintenant des estimations supplémentaires pour la fonction u^ϵ et pour sa dérivée u_t^ϵ qui nous seront utiles lors du passage à la limite lorsque ϵ tendra vers zéro.

Lemme 3.2.2. *Supposons que les hypothèses HP1, HP2 et HP3 sont satisfaites. Alors toute solution u^ϵ du problème (P^ϵ) non négative vérifie l'estimation suivante:*

(i) $u^\epsilon(x, t) \geq \beta x$ dans \overline{Q}_T , où β est définie par l'hypothèse HP3.

De plus il existe deux constantes $M > 0$ et $C_2 > 0$ indépendantes de ϵ lorsque $0 < \epsilon \leq 1$ telles que toute solution u^ϵ du problème (P^ϵ) non négative vérifie:

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & \int_z^1 \int_0^T (u_t^\epsilon)^2 dx dt \leq \frac{M}{z} \quad \forall z > 0, \quad 0 < z < 1; \\ \text{(iii)} \quad & \|u^\epsilon\|_{L^2(0, T; H^2(0, 1))} \leq C_2. \end{aligned}$$

Démonstration. On définit la fonction e par $e \stackrel{\text{def}}{=} u^\epsilon - \beta x$. D'après l'hypothèse HP3, il est immédiat de vérifier que la fonction e satisfait:

$$\begin{aligned} (u^\epsilon + \epsilon)e_t - e_{xx} &= 0, && \text{dans } Q_T; \\ e(x, 0) &\geq 0 && \text{dans } (0, 1); \\ e(0, t) &= 0; \quad e(1, t) \geq 0 && \text{dans } (0, T). \end{aligned}$$

La fonction u^ϵ étant non négative, la fonction e étant régulière, on peut appliquer le principe du maximum (voir théorème 2 p. 168 de Protter et Weinberger [20]) qui implique que la fonction e atteint son minimum sur la partie $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{0\} \times [0, T) \cup \{1\} \times [0, T) \cup [0, 1] \times \{0\}$ du bord de Q_T . Ce qui démontre l'estimation i) du lemme 3.2.1.

Maintenant nous établissons une identité qui nous permettra de prouver les estimations ii) et iii) du lemme 3.2.1. Pour cela nous avons besoin de l'espace de Banach E défini par

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in L^2(0, T; H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)); \frac{d}{dt}\varphi \in L^2(0, T; L^2(0, 1))\}$$

muni de la norme suivante: $\|v\|_E = \|v\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))} + \|\frac{d}{dt}v\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \quad \forall v \in E$. L'espace $H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ est inclus dans $L^2(0,1)$ et l'inclusion est dense, on peut donc affirmer que $\mathcal{D}([0,T]; H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1))$ est dense dans E (voir par exemple L. Tartar [23] p.40).

Nous aurons aussi besoin d'un résultat concernant les traces des fonctions de E que nous rappelons. Auparavant précisons quelques notations. Si $\varphi \in L^2(0,T; H_0^1(0,1))$, alors φ s'identifie à une fonction $\varphi(t, x)$ et $\frac{d}{dt}\varphi$ s'identifie à φ_t .

Il existe deux applications γ_0, γ_T linéaires et continues de $E \rightarrow L^2(0,1)$ définies par:

$$\begin{aligned} \gamma_0 : E &\rightarrow L^2(0,1); & \gamma_T : E &\rightarrow L^2(0,1). \\ v &\mapsto v_x(\cdot, 0); & v &\mapsto v_x(\cdot, T). \end{aligned}$$

Pour montrer ce résultat, on procède par densité, c'est-à-dire que l'on prolonge par continuité une application linéaire continue définie sur un sous-espace dense dans E . Montrons que γ_0 existe et est continue. Soit $v \in \mathcal{D}([0,T]; H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1))$ et soit $a \in C^1([0,T])$ telle que $a(0) = 1$ et $a(T) = 0$. On pose $w \stackrel{\text{def}}{=} av$ et on calcule

$$-\int_0^T \int_0^1 w_{xx} w_t \, dx dt$$

en intégrant par parties. Il vient:

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_0^1 w_{xx} w_t \, dx dt &= \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \int_0^1 [w_x(x,t)]^2 \, dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 [w_x(x,T)]^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_0^1 [w_x(x,0)]^2 \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 [a(0)v_x(x,0)]^2 \, dx. \end{aligned}$$

On en déduit la majoration suivante pour $v_x(\cdot, 0)$ en utilisant l'inégalité de Hölder:

$$\begin{aligned} \|v_x(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}^2 &\leq 2 \left| \int_0^T \int_0^1 [a(t)v_{xx}] [a(t)v_t + a'(t)v] \, dx dt \right| \\ &\leq 2C(T) \|v\|_{L^2(0,T;H^2(0,1))} \left[\|v\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + \|v_t\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \right] \\ &\leq 4C(T) \|v\|_E^2. \end{aligned}$$

On procède de la même manière pour γ_T .

Dans ce qui suit, en raisonnant par densité nous prouvons une identité qui permet d'estimer la norme $L^2(Q_T)$ de u_t^ϵ avec les normes $C^0(0,T; L^2(0,1))$ et $C^0(0,1; L^2(0,T))$ de u_x^ϵ et avec les normes C^1 de u_0 et de u_1 . Tout d'abord, nous translatons la fonction u^ϵ afin de travailler avec une fonction nulle en $x = 0$ et en $x = 1$. Soit v^ϵ la fonction définie par

$v^\epsilon(x, t) \stackrel{\text{déf}}{=} u^\epsilon(x, t) - xu_1(t)$, $\forall (x, t) \in \overline{Q_T}$. On a d'après le lemme 3.2.1 $v^\epsilon \in E$. Soit v_n^ϵ une suite de fonctions de $\mathcal{D}([0, T]; H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1))$ telle que $v_n^\epsilon \rightarrow v^\epsilon$ dans E . Le résultat de continuité des applications traces rappelé précédemment implique que $\gamma_0(\partial_x v_n^\epsilon) \rightarrow \gamma_0(v_x^\epsilon)$ dans $L^2(0, 1)$ et que $\gamma_T(\partial_x v_n^\epsilon) \rightarrow \gamma_T(v_x^\epsilon)$ dans $L^2(0, 1)$.

En intégrant par parties l'expression

$$- \int_0^T \int_0^1 \partial_{xx}^2 v_n^\epsilon \partial_t v_n^\epsilon dx dt$$

on a :

$$- \int_0^T \int_0^1 \partial_{xx}^2 v_n^\epsilon \partial_t v_n^\epsilon dx dt = \frac{1}{2} \int_0^1 [\partial_x v_n^\epsilon(x, T)]^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 [\partial_x v_n^\epsilon(x, 0)]^2 dx.$$

En passant à la limite dans l'expression précédente lorsque n tend vers l'infini, il vient :

$$- \int_0^T \int_0^1 v_{xx}^\epsilon v_t^\epsilon dx dt = \frac{1}{2} \int_0^1 [v_x^\epsilon(x, T)]^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 [v_x^\epsilon(x, 0)]^2 dx,$$

ce qui pour la fonction u^ϵ se traduit après quelques calculs élémentaires par :

$$- \int_0^T \int_0^1 u_{xx}^\epsilon u_t^\epsilon dx dt = \frac{1}{2} \int_0^1 [u_x^\epsilon(x, T)]^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 [u_x^\epsilon(x, 0)]^2 dx - \int_0^T u_1'(t) u_x^\epsilon(1, t) dt.$$

Multipliant l'équation (3.2.1) par u_t^ϵ (qui appartient à $L^2(Q_T)$ d'après le théorème 3.2.2) et intégrant sur le domaine Q_T , nous obtenons d'après l'identité précédente :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^z (u^\epsilon + \epsilon)(u_t^\epsilon)^2 dx dt + \int_0^T \int_z^1 (u^\epsilon + \epsilon)(u_t^\epsilon)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 [(u_x^\epsilon(x, T))]^2 dx \\ = \frac{1}{2} \int_0^1 [u_0'(x)]^2 dx + \int_0^T u_x^\epsilon(1, t) u_1'(t) dt. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Utilisant l'estimation ii) du lemme 3.2.1 nous obtenons une estimation de

$\|u_x^\epsilon(1, \cdot)\|_{L^2(0, T)}$ indépendante de ϵ . La minoration de u^ϵ que fournit l'item i) du lemme 3.2.2, l'inégalité de Hölder et l'hypothèse HP1 permettent de déduire facilement de l'identité (3.2.4) l'estimation ii) sur la dérivée u_t^ϵ du lemme 3.2.2.

Remarquons que l'estimation (3.2.4) implique aussi que $\sqrt{u^\epsilon} u_t^\epsilon$ est uniformément borné dans $L^2(Q_T)$ et montrons que u^ϵ est uniformément bornée dans $L^2(0, T; H^2(0, 1))$. En effet, réutilisant l'équation (3.2.1) on obtient :

$$\int_0^T \int_0^1 (u^\epsilon + \epsilon)(u_t^\epsilon)^2 dx dt = \int_0^T \int_0^1 (u_{xx}^\epsilon)^2 dx dt,$$

d'où

$$\int_0^T \int_0^1 (u_{xx}^\epsilon)^2 dx dt \leq (\|u^\epsilon\|_{C^0([0, 1])} + 1) \int_0^T \int_0^1 (u^\epsilon + \epsilon)(u_t^\epsilon)^2 dx dt.$$

Le membre de droite de l'inégalité précédente s'estime en utilisant l'identité (3.2.4) et les majorations i) et ii) du lemme 3.2.1. Il vient:

$$\int_0^T \int_0^1 (u_{xx}^\epsilon)^2 dx dt \leq (C+1) \left(\frac{1}{2} \|u_0\|_{C^1([0,1])} + TC_1 \|u_1\|_{C^1([0,1])} \right). \quad (3.2.5)$$

L'estimation uniforme du $\sup_{(x,t) \in \overline{Q_T}} |u_x^\epsilon(x,t)|$ (voir lemme 3.2.1) et la majoration (3.2.5) permettent de majorer uniformément la norme $L^2(0,T; H^2(0,1))$ de la famille $\{u^\epsilon\}$, ce qui prouve l'item iii) du lemme 3.2.2. Le lemme 3.2.2 est démontré.

□

A l'aide des résultats que nous venons d'établir pour les problèmes (P^ϵ) , nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.2.1.

Démonstration du théorème 3.2.1. : Passage à la limite lorsque ϵ tend vers zéro.

a) Grâce au théorème d'Ascoli-Arzelà, et grâce aux estimations établies précédemment pour la famille de fonctions $\{u^\epsilon\}$, on montre l'existence d'une fonction u satisfaisant les estimations données par les items i), ii) et iii) du théorème 3.2.1. b) Ensuite, on vérifie que cette fonction u est une solution faible du problème (P), puis on montre l'unicité des solutions faibles du problème (P) appartenant à $L^2(0,T; H^2(0,1))$.

a) Le lemme 3.2.1 fournit l'existence d'une famille de fonctions $\{u^\epsilon\}$ solutions des problèmes (P^ϵ) qui appartient en particulier à $C^0(\overline{Q_T})$. Si nous montrons que $\{u^\epsilon\}$ est une famille de fonctions équi continues (cf [21] p. 496), la famille étant équi bornée de $\overline{Q_T}$ dans \mathbf{R} (d'après l'item i) du lemme 3.2.1), le théorème d'Ascoli-Arzelà fournira l'existence d'une fonction $u \in C^0(\overline{Q_T})$ et l'existence d'une sous-suite $\{u^{k_k}\}$ avec $\epsilon_k = \frac{1}{k}$ telles que u^{k_k} converge uniformément vers u dans $\overline{Q_T}$ lorsque k tend vers l'infini.

Dans ce qui suit, il s'agit de montrer que la famille $\{(u^\epsilon + \epsilon)^2\}$ est une famille de fonctions équi continues. Pour simplifier l'écriture, nous noterons v^ϵ pour $(u^\epsilon + \epsilon)^2$. On doit vérifier que:

$$\forall \mu > 0, \forall (x_1, t_1) \in \overline{Q_T}, \exists \delta_0 > 0, \exists \delta_1 > 0, \text{ tels que } \forall (x_2, t_2) \in \overline{Q_T} \text{ vérifiant} \\ |x_1 - x_2| \leq \delta_0 \text{ et } |t_1 - t_2| \leq \delta_1, \text{ alors } |v^\epsilon(x_1, t_1) - v^\epsilon(x_2, t_2)| \leq \mu, \forall \epsilon, 0 < \epsilon \leq 1.$$

Tout d'abord remarquons que pour tout $t_3, t_4 \in [0, T]$ et pour tout $z, y \in [0, 1]$, $y > z$ en intégrant l'équation (3.2.1) il vient:

$$\int_z^y dx \int_{t_3}^{t_4} v_t^\epsilon dt = 2 \int_{t_3}^{t_4} dt \int_z^y u_{xx}^\epsilon(x, t) dx,$$

d'où nous déduisons:

$$\left| \int_z^y [v^\epsilon(x, t_4) - v^\epsilon(x, t_3)] dx \right| = 2 \left| \int_{t_3}^{t_4} [u_x^\epsilon(y, t) - u_x^\epsilon(z, t)] dt \right|.$$

L'estimation uniforme $\sup_{(x,t) \in \overline{Q_T}} |u_x^\epsilon(x,t)| \leq C_1$ (voir lemme 3.2.1 ii)) permet de majorer le membre de droite de l'inégalité précédente et on a :

$$\forall y, z \in [0, 1], z < y, \forall t_3, t_4 \in [0, T], \quad \left| \int_z^y [v^\epsilon(x, t_4) - v^\epsilon(x, t_3)] dx \right| \leq 4C_1 |t_4 - t_3|.$$

L'intégrande étant continue, en utilisant la première formule de la moyenne pour le membre de gauche de l'inégalité précédente, on a :

$$\begin{aligned} \forall t_3, t_4 \in [0, T], \forall y, z \in [0, 1], z < y, \exists x_3 \in (z, y) \text{ tel que} \\ (y - z) |v^\epsilon(x_3, t_4) - v^\epsilon(x_3, t_3)| \leq 4C_1 |t_4 - t_3|. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Par ailleurs, le théorème des accroissements finis et les estimations $\sup_{(x,t) \in \overline{Q_T}} |u^\epsilon(x,t)| \leq C$, $\sup_{(x,t) \in \overline{Q_T}} |u_x^\epsilon(x,t)| \leq C_1$ (voir lemme 3.2.1) impliquent que :

$$\begin{aligned} \forall \eta_1 > 0, \forall x, z \in [0, 1] \text{ tels que } |x - z| \leq \eta_1 \text{ alors} \\ |v^\epsilon(x, t) - v^\epsilon(z, t)| \leq 2C_1(C + 1)\eta_1, \forall t \in [0, T], \forall \epsilon, 0 < \epsilon \leq 1. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Soit $\mu > 0$, fixé, et soit $(x_1, t_1) \in \overline{Q_T}$ arbitraire, fixé, déterminons δ_0 , et δ_1 pour que si $|x_1 - x_2| \leq \delta_0$ et $|t_1 - t_2| \leq \delta_1$ alors $|v^\epsilon(x_1, t_1) - v^\epsilon(x_2, t_2)| \leq \mu$, $\forall \epsilon, 0 < \epsilon \leq 1$.
On pose $\delta_0 = \frac{\mu}{12C_1(C+1)}$, alors l'estimation (3.2.7) avec $\eta_1 = 2\delta_0$ implique que

$$\begin{aligned} \forall x, z \in [\max(x_1 - \delta_0, 0), \min(x_1 + \delta_0, 1)] \text{ on a } |v^\epsilon(x, t) - v^\epsilon(z, t)| \leq \frac{\mu}{3}, \\ \forall t \in [0, T], \forall \epsilon, 0 < \epsilon \leq 1. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

En posant $z = \max(x_1 - \delta_0, 0)$, $y = \min(x_1 + \delta_0, 1)$, $\delta_1 = \frac{\mu(y-z)}{12C_1}$, $t_4 = t_2$, $t_3 = t_1$, l'estimation (3.2.6) fournit :

$$\forall t_2 \in [0, T] \text{ tel que } |t_2 - t_1| \leq \delta_1 \text{ alors } |v^\epsilon(x_3, t_2) - v^\epsilon(x_3, t_1)| \leq \frac{\mu}{3}, \forall \epsilon, 0 < \epsilon \leq 1.$$

Il est immédiat de déduire de l'inégalité triangulaire, pour l'expression

$$v^\epsilon(x_1, t_1) - v^\epsilon(x_2, t_2) = v^\epsilon(x_1, t_1) - v^\epsilon(x_3, t_1) + v^\epsilon(x_3, t_1) - v^\epsilon(x_3, t_2) + v^\epsilon(x_3, t_2) - v^\epsilon(x_2, t_2),$$

de l'estimation (3.2.8) avec $x = x_1$, $z = x_3$, de l'estimation précédente et de l'estimation (3.2.8) avec $x = x_3$, $z = x_2$ que

$$|x_1 - x_2| \leq \delta_0 \text{ et } |t_1 - t_2| \leq \delta_1 \Rightarrow |v^\epsilon(x_1, t_1) - v^\epsilon(x_2, t_2)| \leq \mu, \forall \epsilon, 0 < \epsilon \leq 1.$$

La famille $\{v^\epsilon\}$ est donc équicontinue.

L'inégalité :

$$|a - b|^2 \leq |a^2 - b^2| \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2,$$

et la croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$, impliquent alors que la famille $\{u^\epsilon\}$ est équicontinue.

Ainsi, on obtient l'existence d'une fonction limite $u \in C^0(\overline{Q_T})$ et la convergence uniforme d'une sous-suite $\{u^{\epsilon_k}\}$ avec $\epsilon_k = \frac{1}{k}$ vers u . Maintenant nous allons montrer que de cette sous-suite $\{u^{\epsilon_k}\}$ nous pouvons en extraire une autre sous-suite uniformément bornée dans des normes appropriées et qui converge aussi vers la fonction u . Ainsi, la fonction u vérifiera les estimations i), ii), et iii) du théorème 3.2.1. Pour cela rappelons les propriétés de compacité suivantes que la boule unité d'un espace de Banach séparable satisfait (voir Brézis [4]):

- la boule unité d'un espace de Banach réflexif séparable est faiblement séquentiellement compacte;
- la boule unité du dual d'un espace de Banach séparable non réflexif est séquentiellement compacte pour la topologie faible étoile.

L'estimation iii) du lemme 3.2.2 implique que la famille $\{u^{\epsilon_k}\}$ est uniformément bornée en norme $L^2(0, T; H^2(0, 1))$.

Des propriétés de compacité séquentielle de la boule unité d'un espace de Banach réflexif et séparable ($L^2(0, T; H^s(0, 1))$ pour $s = 1, 2$), de l'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(Q_T)$ et de la propriété u^{ϵ_k} est uniformément bornée et converge vers u uniformément sur $\overline{Q_T}$, on déduit l'existence d'une sous-suite $\{\epsilon_{k_1} = \frac{1}{k_1}\}$ de la suite $\{\epsilon_k = \frac{1}{k}\}$ telle que:

$$u^{\epsilon_{k_1}} \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(0, T; H^s(0, 1)) \text{ faiblement pour } s = 1, 2.$$

Ce qui prouve que $u \in L^2(0, T; H^s(0, 1))$ pour $s = 1, 2$.

De l'estimation uniforme de la norme $H^1((z, 1) \times (0, 1))$ de la famille $\{u^\epsilon\}$ (voir l'item ii) du lemme 3.2.2), en raisonnant comme précédemment, on déduit l'existence d'une sous-suite $\{\epsilon_{k_2} = \frac{1}{k_2}\}$ de la suite $\{\epsilon_{k_1}\}$ telle que:

$$u^{\epsilon_{k_2}} \rightharpoonup u \text{ dans } H^1((z, 1) \times (0, 1)) \forall z, \quad 0 < z < 1,$$

ce qui prouve que la fonction u satisfait l'estimation ii) du théorème 3.2.1.

Montrons maintenant que $u \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(0, 1))$. De l'estimation uniforme de u_x^ϵ en norme C^0 donnée par le lemme 3.2.1, de la propriété: l'espace $L^\infty(Q_T)$ est le dual de $L^1(Q_T)$, espace de Banach séparable, et de la propriété de compacité séquentielle de la boule unité du dual d'un espace de Banach séparable non réflexif nous déduisons l'existence d'une sous-suite $\{\epsilon_{k_3} = \frac{1}{k_3}\}$ de la suite $\{\epsilon_{k_2}\}$ telle que:

$$u_x^{\epsilon_{k_3}} \rightharpoonup \chi \text{ dans } L^\infty(Q_T) \text{ faiblement étoile, i.e}$$

$$\lim_{k_3 \rightarrow \infty} \int_{Q_T} [u_x^{\epsilon_{k_3}} - \chi] w \, dx \, dt = 0, \quad \forall w \in L^1(Q_T).$$

En outre, nous savons que $u^{\epsilon_{k_2}} \rightarrow u$ fortement dans C^0 et que la famille $\{u^{\epsilon_{k_2}}\}$ est uniformément bornée, ainsi $u^{\epsilon_{k_2}} \rightarrow u$ dans $\mathcal{D}'(Q_T)$, et donc $u^{\epsilon_{k_3}} \rightarrow u$ dans $\mathcal{D}'(Q_T)$.

L'opérateur de dérivation ∂_x étant un opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}'(Q_T)$ dans lui-même, nous avons: $u_x^{\epsilon_{k_3}} \rightarrow u_x$ dans $\mathcal{D}'(Q_T)$ lorsque $k_3 \rightarrow \infty$. La convergence faible étoile de $u_x^{\epsilon_{k_3}}$ vers χ induit en particulier la convergence de $u_x^{\epsilon_{k_3}}$ vers χ dans $\mathcal{D}'(Q_T)$ lorsque $k_3 \rightarrow \infty$. L'espace $\mathcal{D}'(Q_T)$ est un espace topologique séparé, la limite d'une suite convergente est unique, ce qui se traduit par $\chi = u_x$, et donc $u_x \in L^\infty(Q_T)$. Ce qui prouve que la fonction u vérifie l'estimation i) du théorème 2.3.1.

b) Montrons que la fonction u dont nous avons montré l'existence en a) est une solution faible du problème (P). Pour cela Considérons une formulation variationnelle des problèmes (P^ϵ) , on a:

$$\int_0^1 [u^{\epsilon_{k_3}} + \epsilon_{k_3}]^2 \varphi \Big|_0^T dx + \int_{Q_T} -[u^{\epsilon_{k_3}} + \epsilon_{k_3}]^2 \varphi_t + 2u_x^{\epsilon_{k_3}} \varphi_x dt dx = 0 \quad \forall \varphi \in W_2^{1,1}(Q_T).$$

La majoration uniforme de $u^{\epsilon_{k_3}}$, la convergence uniforme de $u^{\epsilon_{k_3}}$ vers u , et la convergence faible de $u_x^{\epsilon_{k_3}}$ vers u_x dans $L^2(0, T; H^1(0, 1))$ lorsque k_3 tend vers l'infini que nous avons obtenues en a) nous permettent de passer à la limite dans l'expression précédente lorsque k_3 tend vers l'infini. On en déduit que u est une solution faible du problème (P).

Montrons maintenant l'unicité des solutions faibles appartenant à $L^2(0, T; H^2(0, 1))$. Supposons qu'il existe deux solutions faibles u, v appartenant à $L^2(0, T; H^2(0, 1))$. On a:

$$\frac{1}{2}(u^2 - v^2)_t - (u - v)_{xx} = 0 \quad \text{dans } Q_T. \quad (3.2.9)$$

On multiplie l'équation (3.2.9) par la fonction $\text{sgn}(u - v)$ (signe de $u - v$) et on intègre sur $(0, 1) \times (0, t)$. Il vient:

$$\int_0^t \int_0^1 \frac{1}{2}(u^2 - v^2)_t \text{sgn}(u - v) dx dt - \int_0^t \int_0^1 (u - v)_{xx} \text{sgn}(u - v) dx dt = 0. \quad (3.2.10)$$

Le deuxième terme de la différence (3.2.10) est négatif ou nul (inégalité de Kato), on en déduit:

$$\frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} \int_0^1 |u^2 - v^2| dx dt \leq 0,$$

ce qui entraîne, puisque u et v vérifient la même condition initiale:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 |u^2(x, t) - v^2(x, t)| dx \leq 0, \quad \forall t, \quad 0 < t \leq T.$$

Ce qui prouve l'unicité. L'unicité des solutions faibles appartenant à $L^2(0, T; H^2(0, 1))$ et les résultats que nous avons établis en a) montrent qu'il existe un unique $u \in C^0(\bar{Q}_T) \cap L^2(0, T; H^2(0, 1))$ tel que de toute sous-suite $\{u^{\epsilon_k}\}$ avec $\epsilon_k = \frac{1}{k}$ extraite de la suite $\{u^\epsilon\}$ on peut en extraire une sous-suite $\{u^{\epsilon_{k_1}}\}$ avec $\epsilon_{k_1} = \frac{1}{k_1}$ telle que $u^{\epsilon_{k_1}}$ converge vers u

uniformément sur $\overline{Q_T}$ et faiblement dans $L^2(0, T; H^1(0, 1))$ lorsque k_1 tend vers l'infini. On en déduit (en raisonnant par l'absurde) que c'est toute la suite $\{u^\epsilon\}$ qui converge vers u . Le théorème 3.2.1 est démontré.

□

Remarques.

On peut démontrer l'unicité des solutions faibles (voir [21]), mais la démonstration est un peu plus technique.

Il n'est pas nécessaire de supposer u_0 et u_1 de classe C^1 sur $[0, 1]$, respectivement sur $[0, T]$, il suffit de supposer que u_0 et u_1 sont de classe C^1 sur $(0, 1)$, respectivement sur $(0, T)$ et ont une dérivée bornée.

Les hypothèses HP1 et HP2 peuvent être affaiblies si des solutions plus faibles du problème (P) sont considérées. On pourra consulter [2], [3], [11] sur cette question.

La régularité de u là où u est positive peut être étudiée à l'aide des méthodes standards pour les problèmes uniformément paraboliques (cf [1]).

Remarque sur la régularité de u , dans un cas particulier.

On pose $u_1(t) = 1$ pour tout $t \in [0, T]$, et on s'intéresse à la régularité de la fonction u_t lorsque u est une solution faible du problème (P) appartenant à $L^2(0, T; H^2(0, 1))$. On a le résultat suivant:

Théorème 3.2.2. Posons $u_1(t) = 1$ et supposons que les hypothèses HP1, HP2 et HP3 sont satisfaites. Alors toute solution faible du problème (P) u appartenant à $L^2(0, T; H^2(0, 1))$ satisfait la propriété suivante:

$$\forall t_0 > 0, \quad \forall q, \quad 1 \leq q < \frac{3}{2}, \quad u_t \in L^q((0, 1) \times (t_0, T))$$

Avant de démontrer le théorème 3.2.2, mentionnons la méthode que nous utilisons et établissons quelques résultats intermédiaires dont nous aurons besoin.

a) On approche la fonction u par une suite de fonctions $\{u^\epsilon\}_{0 < \epsilon < \frac{1}{2}}$ solutions de problèmes perturbés.

b) On établit des estimations pour u^ϵ .

c) On obtient les mêmes estimations pour u_t que celles obtenues en b) pour u^ϵ en passant à la limite lorsque ϵ tend vers zéro.

a) Commençons par régulariser la donnée initiale u_0 .

Lemme 3.2.3. Supposons que la fonction non négative u_0 est de classe C^1 sur $[0, 1]$, et posons $M \stackrel{\text{def}}{=} \max(\sup_{x \in [0, 1]} |u'_0(x)|, 1)$. Alors il existe une suite de fonctions $\{u_p\}_{p > 2}$ telles que $u_p \in C^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{R}_+^*)$ et qui vérifient les propriétés suivantes:

- (i) $\frac{M+1}{p} \leq u_p(x) \leq \max_{y \in [0, 1]} |u_0(y)| + M + 1$ pour tout $p > 2$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$;
- (ii) $u_p \searrow u_0$ uniformément lorsque p tend vers l'infini;
- (iii) pour tout $p > 2$ il existe deux voisinages V_0 et V_1 des points $\{0\}$ et $\{1\}$ tels que $u_p(x) = u_0(\frac{1}{p}) + \frac{M+1}{p}, \forall x \in V_0$ et $u_p(x) = u_0(1 - \frac{1}{p}) + \frac{M+1}{p}, \forall x \in V_1$;
- (iiii) $\max_{x \in \mathbf{R}} |u'_p(x)| \leq M, \forall p > 2$.

Démonstration. Voir annexe 1.

On peut maintenant introduire la suite des problèmes perturbés (P^ϵ) . Pour tout $p > 2$, on pose $\epsilon = \frac{1}{p}$, et on définit le problème (P^ϵ) par:

Trouver $u^\epsilon \in C^{2,1}(\overline{Q_T}) \cap C^0(\overline{Q_T})$ qui vérifie:

$$u^\epsilon u_t^\epsilon = u_{xx}^\epsilon \quad \text{dans } Q_T; \quad (3.2.11)$$

$$u^\epsilon(x, 0) = u_p(x), \quad \text{dans } (0, 1); \quad (3.2.12)$$

$$u^\epsilon(0, t) = u_p(0), \quad u^\epsilon(1, t) = u_p(1) \quad \text{dans } (0, T), \quad (3.2.13)$$

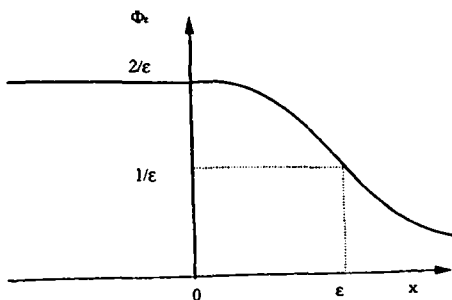
où la fonction u_p est définie au lemme 3.2.3. Concernant l'existence et l'unicité de solutions pour le problème (P^ϵ) on a:

Lemme 3.2.4. Supposons que la fonction non négative u_0 est de classe C^1 sur $[0, 1]$. Alors il existe α , $0 < \alpha < 1$ tel que pour tout ϵ , $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ le problème (P^ϵ) admet une unique solution $u^\epsilon \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$. De plus u^ϵ vérifie:

$$\epsilon(M+1) \leq u^\epsilon(x, t) \leq \max_{x \in [0, 1]} |u_0(x)| + M + 1, \quad \forall (x, t) \in \overline{Q_T}$$

$$\text{où } M \stackrel{\text{def}}{=} \max \left(\sup_{x \in [0, 1]} |u'_0(x)|, 1 \right). \quad (3.2.14)$$

Démonstration. Pour tout $\epsilon > 0$, on définit $\Phi_\epsilon \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ une régularisation de la fonction $\frac{1}{x}$, telle que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\Phi_\epsilon^{(l)}| < \infty$ pour $l = 0, 1, 2$.



Dans le problème (P^ϵ) on remplace l'équation (3.2.11) par l'équation

$$u_t^\epsilon - \Phi_\epsilon(u^\epsilon) u_{xx}^\epsilon = 0 \quad \text{dans } Q_T. \quad (3.2.15)$$

Si on pose $a_1(x, t, u, u_x) = \Phi_\epsilon(u) u_x$, $a(x, t, u, u_x) = \Phi'_\epsilon(u) (u_x)^2$, $\psi(x, t) = u_p(x)$, on a que $\psi(x, t) \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T}) \quad \forall \alpha, 0 < \alpha < 1$ et que ψ satisfait les conditions de compatibilité à l'ordre un données par les conditions 6.3 p.449 de [12] (voir item iii) du lemme 3.2.3). On

peut appliquer le théorème 6.1 p.452 de [12] (avec $\beta = \alpha$) qui fournit l'existence et l'unicité d'une fonction $u^\epsilon \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$ vérifiant les équations (3.2.15), (3.2.12), et (3.2.13).

Montrons que u^ϵ est solution du problème (P^ϵ) . On remarque que l'opérateur \mathcal{L} défini par: $w \mapsto w_t - \Phi_\epsilon(u^\epsilon)w_{xx}$ est uniformément parabolique puisque $\Phi_\epsilon(u^\epsilon)$ est minoré par une constante positive. Le principe du maximum (voir [20] théorème 2 p.168) implique qu'une fonction u^ϵ vérifiant (3.2.15) atteint son maximum sur la partie $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{0\} \times [0, T) \cup \{1\} \times [0, T) \cup [0, 1] \times \{0\}$ du bord de Q_T .

Ainsi en utilisant l'estimation i) du lemme 3.2.3 on a:

$$\max_{(x,t) \in \overline{Q_T}} u^\epsilon(x,t) \leq \max_{x \in [0,1]} u_p(x) \leq \max_{x \in [0,1]} |u_0(x)| + M + 1.$$

Multipliant les équations (3.2.15), (3.2.12) et (3.2.13) par -1 , notant $v^\epsilon = -u^\epsilon$, le principe du maximum implique que

$$\max_{(x,t) \in \overline{Q_T}} v^\epsilon(x,t) \leq \max_{x \in [0,1]} -u_p(x) \leq -\frac{M+1}{p} = -\epsilon(M+1).$$

Finalement on obtient:

$$\epsilon(M+1) \leq u^\epsilon(x,t) \leq \max_{x \in [0,1]} |u_0(x)| + M + 1, \quad \forall (x,t) \in \overline{Q_T},$$

ce qui implique que u^ϵ vérifie l'équation (3.2.11) puisque $\forall s \in [\epsilon(M+1), 2M+1]$ on a $\Phi_\epsilon(s) = \frac{1}{s}$.

Le lemme 3.2.4 est démontré.

□

b) Nous sommes maintenant en mesure de donner une estimation de u_t^ϵ . Plus précisément on a:

Lemme 3.2.5. Supposons que la fonction non négative u_0 est de classe C^1 sur $[0, 1]$, et soit u^ϵ une solution du problème (P^ϵ) dont l'existence est assurée par le lemme 3.2.4. Alors l'estimation suivante a lieu

$$u_t^\epsilon \leq \frac{u^\epsilon}{t}. \quad (3.2.16)$$

De plus pour tout t_0 , $0 < t_0 \leq T$ il existe une constante C indépendante de ϵ telle que

$$\|u_t^\epsilon\|_{L^q((0,1) \times (t_0, T))} \leq C \text{ pour tout } q \text{ tel que } 1 \leq q < \frac{3}{2}. \quad (3.2.17)$$

Démonstration. (cf [2]) Nous définissons la fonction $p(x, t)$ par:

$$p(x, t) = \frac{u_t^\epsilon(x, t)}{u^\epsilon(x, t)} = \frac{u_{tx}^\epsilon(x, t)}{(u^\epsilon)^2(x, t)}, \quad \forall (x, t) \in \overline{Q_T}.$$

Un calcul simple permet de montrer que:

$$p_t = \frac{u_{txx}^\epsilon}{(u^\epsilon)^2} - 2u_t^\epsilon \frac{u_{xz}^\epsilon}{(u^\epsilon)^3} = \frac{(pu^\epsilon)_{xz}}{(u^\epsilon)^2} - 2p^2,$$

d'où nous déduisons que p vérifie l'équation suivante:

$$p_t - \frac{p_{xz}}{u^\epsilon} - 2u_t^\epsilon \frac{p_x}{(u^\epsilon)^2} + p^2 = 0 \quad \text{dans } Q_T. \quad (3.2.18)$$

Si on définit l'opérateur \mathcal{L} par:

$$\varphi \mapsto \mathcal{L}(\varphi) = \varphi_t - \frac{\varphi_{xz}}{u^\epsilon} - 2u_t^\epsilon \frac{\varphi_x}{(u^\epsilon)^2},$$

on vérifie aisément que la fonction $\psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{t} \forall t \in \mathbb{R}_+^*$ satisfait:

$$\mathcal{L}(\psi) + \psi^2 = 0 \quad \text{dans } Q_T.$$

Afin de comparer les fonctions p et ψ , nous définissons la fonction w par $w \stackrel{\text{def}}{=} p - \psi$.

La fonction $p(\cdot, \cdot)$ est continue sur $\overline{Q_T}$ et puisque $\lim_{t \rightarrow 0+} \psi(t) = +\infty$ nous pouvons choisir t_0 tel que $w(x, \bar{t}) < 0$ pour tout \bar{t} tel que $0 < \bar{t} \leq t_0$ et pour tout $x \in [0, 1]$.

Montrons que $w(x, t) < 0$ dans $(0, 1) \times [\bar{t}, T)$ pour tout $\bar{t} \in (0, t_0]$, ainsi nous aurons prouvé que $w(x, t) \leq 0$ dans $(0, 1) \times (0, T)$, qui n'est qu'une réécriture de l'inégalité (3.2.16) pour la fonction u^ϵ .

Il est immédiat de contrôler que:

$$w(x, t) < 0 \text{ sur } \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{0\} \times [\bar{t}, T) \cup \{1\} \times [\bar{t}, T) \cup (0, 1) \times \{\bar{t}\}.$$

De plus, l'égalité suivante a lieu:

$$\mathcal{L}(w) + (p + \psi)w = 0 \text{ dans } (0, 1) \times (\bar{t}, T). \quad (3.2.19)$$

L'opérateur $w \mapsto \mathcal{L}(w) + (p + \psi)w$ est un opérateur linéaire uniformément parabolique à coefficients Höldériens. Les résultats classiques d'existence, d'unicité et de régularité pour de tels opérateurs (voir Friedman [10] corollaire 1 p.171 par exemple) entraînent que $w \in C^{2,1}((0, 1) \times (\bar{t}, T)) \cap C^0([0, 1] \times [\bar{t}, T])$. Nous pouvons alors appliquer le principe du maximum à l'équation (3.2.19) (cf théorème 7 p.174 et remarque ii) p.175 de [20] pour la fonction $-w$ qui implique que le maximum de la fonction w est atteint sur la partie Γ du bord de $(0, 1) \times (\bar{t}, T)$. On en déduit que $w < 0$ dans $[0, 1] \times [\bar{t}, T)$.

Montrons maintenant la propriété (3.2.17). Dans ce qui suit on omettra l'indice ϵ pour ne pas alourdir l'écriture. On note par u_t^+ la fonction $u_t^+ = \max(0, u_t)$; d'après l'estimation (3.2.16) et (3.2.14) on a:

$$u_t^+ \leq \frac{\|u_0\|_{C^0([0,1])} + M + 1}{t}. \quad (3.2.20)$$

Il suffit donc d'estimer u_t^- . Pour $\theta = q - 1 < \frac{1}{2}$ et pour tout t_0 , $0 < t_0 < T$ nous avons:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \int_0^1 (u_t^-)^q dx dt &= \int_{t_0}^T \int_0^1 u^\theta (u_t^-)^{2\theta} \frac{(u_t^-)^{q-2\theta}}{u^\theta} dx dt \\ &= \int_{t_0}^T \int_0^1 \{u(u_t^-)^2\}^\theta \left\{ \frac{u_t^-}{u^{\frac{\theta}{1-\theta}}} \right\}^{1-\theta} dx dt. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder pour le membre de droite avec $r = \frac{1}{\theta}$ et $r^* = \frac{1}{1-\theta}$, il vient la majoration suivante:

$$\int_{t_0}^T \int_0^1 (u_t^-)^q dx dt \leq \left\{ \int_{t_0}^T \int_0^1 u(u_t^-)^2 dx dt \right\}^\theta \left\{ \int_{t_0}^T \int_0^1 \frac{u_t^-}{u^{\frac{\theta}{1-\theta}}} dx dt \right\}^{1-\theta}. \quad (3.2.21)$$

Nous majorons $\int_{t_0}^T \int_0^1 u(u_t^-)^2 dx dt$ par $\int_{t_0}^T \int_0^1 u(u_t)^2 dx dt$, que nous estimons avec la même méthode que celle que nous avons employée pour obtenir l'estimation (3.2.4). On a:

$$\int_{t_0}^T \int_0^1 u(u_t^-)^2 dx dt \leq C(\|u_p'\|_{C^0([0,1])}^2). \quad (3.2.22)$$

Pour le deuxième terme du membre de droite de (3.2.21) nous avons l'identité:

$$\int_{t_0}^T \int_0^1 \frac{u_t^-}{u^{\frac{\theta}{1-\theta}}} dx dt = \int_{t_0}^T \int_0^1 \frac{u_t^+}{u^{\frac{\theta}{1-\theta}}} dx dt - \int_{t_0}^T \int_0^1 \frac{u_t}{u^{\frac{\theta}{1-\theta}}} dx dt.$$

D'après (3.2.16) et (3.2.14) on a:

$$\int_{t_0}^T \int_0^1 \frac{u_t^+}{u^{\frac{\theta}{1-\theta}}} dx dt \leq \int_{t_0}^T \int_0^1 \frac{1}{t} u^{\frac{1-2\theta}{1-\theta}} dx dt \leq \frac{1}{t_0} \|u_0\|_{C^0([0,1])}^{\frac{1-2\theta}{1-\theta}}. \quad (3.2.23)$$

D'autre part, nous vérifions que:

$$-\int_{t_0}^T \int_0^1 \frac{u_t}{u^{\frac{\theta}{1-\theta}}} dx dt = -\frac{1-\theta}{1-2\theta} \int_{t_0}^T dt \frac{d}{dt} \int_0^1 u^{\frac{1-2\theta}{1-\theta}} dx \leq \frac{1-\theta}{1-2\theta} \|u_0\|_{C^0([0,1])}^{\frac{1-2\theta}{1-\theta}}. \quad (3.2.24)$$

Finalement avec (3.2.22), (3.2.23) et avec (3.2.24) nous déduisons de (3.2.21) l'estimation:

$$\int_{t_0}^T \int_0^1 (u_t^-)^q dx dt \leq C \left[\|u_p'\|_{C^0([0,1])}^2 + \frac{1}{t_0} \|u_0\|_{C^0([0,1])}^{\frac{1-2\theta}{1-\theta}} + \frac{1}{t_0} \|u_0\|_{C^0([0,1])}^{\frac{1-2\theta}{1-\theta}} \right]^{1-\theta}, \quad (3.2.25)$$

où la constante C ne dépend pas de ϵ . On majore $\|u_p'\|_{C^0([0,1])}^2$ par $\max(\|u_p'\|_{C^0([0,1])}^2, 1)$ et en utilisant l'item (iii) du lemme 3.2.3 on montre que l'estimation (3.2.25) est indépendante de ϵ . Les estimations (3.2.20) et (3.2.25) fournissent alors une majoration uniforme en ϵ de la norme $L^q((0,1) \times (t_0, T))$ de u_t^ϵ . Le lemme 3.2.5 est démontré.

□

Remarque.

On peut modifier l'estimation (3.2.22) de telle sorte que la constante du membre de droite ne dépende que de $\|u_0\|_{C^0([0,1])}$ car on intègre de $t_0 > 0$ à T . L'estimation devient plus technique à obtenir.

Finalement, donnons une dernière estimation a priori de $\|u_x^\epsilon\|_{C^0(\overline{Q_T})}$ qui nous sera utile lorsque nous nous intéresserons au passage à la limite lorsque ϵ tendra vers zéro.

Lemme 3.2.6. Supposons que la fonction non négative u_0 est de classe C^1 sur $[0, 1]$, et soit $u^\epsilon \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$ une solution du problème (P^ϵ) , c'est-à-dire des équations (3.2.11), (3.2.12) et (3.2.13). Alors il existe une constante C indépendante de $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ telle que:

$$\|u^\epsilon\|_{C^0(\overline{Q_T})} \leq C(\|u_0\|_{C^1([0,1])}). \quad (3.2.26)$$

Démonstration. voir annexe 2.

□

Démonstration du théorème 3.2.2. : Passage à la limite lorsque ϵ tend vers zéro.

Nous souhaitons étendre l'estimation (3.2.17) à la fonction u solution faible du problème (P) . Si nous montrons que u^ϵ converge vers l'unique solution faible du problème (P) dans $L^2(0, T; H^2(0, 1))$, nous pourrions étendre l'estimation (3.2.17) à la fonction u en passant à la limite lorsque ϵ tendra vers zéro puisque (3.2.17) est indépendante de ϵ .

Maintenant nous pouvons montrer le résultat d'existence et de convergence suivant:

Lemme 3.2.7. Supposons que la fonction non négative u_0 est de classe C^1 sur $[0, 1]$. Alors il existe $u \in C^0(\overline{Q_T}) \cap L^2(0, T; H^2(0, 1))$ telle que

$$\begin{aligned} \forall t_0 > 0, \quad \forall q, \quad 1 \leq q < \frac{3}{2}, \quad u_t \in L^q((0, 1) \times (t_0, T)); \\ u^\epsilon \rightarrow u \text{ uniformément dans } \overline{Q_T}; \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

$$u^\epsilon \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H^1(0, 1)). \quad (3.2.28)$$

Démonstration. Posons $\epsilon = \frac{1}{p}$, $p > 2$, le lemme 3.2.4 fournit l'existence d'une suite de fonctions $\{u^\epsilon\}_{0 < \epsilon < \frac{1}{2}}$ solutions des problèmes (P^ϵ) . Montrons que la suite $\{u^\epsilon\}_{0 < \epsilon < \frac{1}{2}}$ est une suite convergente dans $L^r(Q_T)$ pour $1 \leq r < +\infty$ lorsque p tend vers l'infini, et notons u sa limite.

D'après l'item ii) du lemme 3.2.3 nous savons que $u_p \searrow u_0$ uniformément sur $[0, 1]$ lorsque p tend vers l'infini. Montrons que la suite $\{u^\epsilon\}$ est une suite non croissante lorsque p tend vers l'infini (ϵ tend vers zéro). Soit p_1 et p_2 tels que $2 < p_1 < p_2$ et soit $\epsilon_1 = \frac{1}{p_1}$ et $\epsilon_2 = \frac{1}{p_2}$ ($0 < \epsilon_2 < \epsilon_1 < \frac{1}{2}$); posons $v = u^{\epsilon_1} - u^{\epsilon_2}$, on vérifie immédiatement que v satisfait les équations suivantes:

$$\begin{aligned} v_t - \frac{2v_{xx}}{u^{\epsilon_1} + u^{\epsilon_2}} + \frac{\partial_t(u^{\epsilon_1} + u^{\epsilon_2})}{u^{\epsilon_1} + u^{\epsilon_2}} v &= 0, & \text{dans } Q_T; \\ v(x, 0) = u_{p_1}(x) - u_{p_2}(x) &\geq 0, & \text{dans } [0, 1]; \\ v(0, t) = u_{p_1}(0) - u_{p_2}(0) &\geq 0; \quad v(1, t) = u_{p_1}(1) - u_{p_2}(1) &\geq 0 \text{ dans } [0, 1]. \end{aligned}$$

D'après l'estimation (3.2.14) $u^{\epsilon_1} + u^{\epsilon_2} \geq (M+1)(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ et comme $u^{\epsilon_1}, u^{\epsilon_2}$ appartiennent à $C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$, le principe du maximum (voir théorème 7 p.174 et la remarque ii) p.

175 de [20]) implique que $v \geq 0$, ce qui prouve que la suite $\{u^\epsilon\}_{0 < \epsilon < \frac{1}{2}}$ est une suite non croissante.

L'estimation (3.2.14) du lemme 3.2.4 implique que la suite u^ϵ est minorée par 0, la suite u^ϵ converge donc ponctuellement vers une fonction u . Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et l'estimation (3.2.14) entraînent que $u^\epsilon \rightarrow u$ dans $L^r(Q_T)$ fortement pour tout r , $1 \leq r < +\infty$.

Montrons maintenant que $\forall t_0 > 0$, $\forall q$, $1 \leq q < \frac{3}{2}$, $u_t \in L^q((0,1) \times (t_0, T))$. Soit q tel que $1 \leq q < \frac{3}{2}$, l'estimation (3.2.17) et les propriétés de compacité de la boule unité d'un espace de Banach réflexif et séparable, impliquent que $\forall t_0 > 0$, il existe $\chi \in L^2((0,1) \times (t_0, T))$ et il existe une sous-suite $\{p_k\}$ extraite de la suite $\{p\}_{p>2}$ telles que en posant $\epsilon_k = \frac{1}{p_k}$ on ait: $u_t^{\epsilon_k} \rightharpoonup \chi$ $L^q((0,1) \times (t_0, T))$ faiblement lorsque p_k tend vers l'infini. Comme par ailleurs, $u^\epsilon \rightarrow u$ dans $L^q((0,1) \times (t_0, T))$, et donc dans $\mathcal{D}'((0,1) \times (t_0, T))$ lorsque p tend vers l'infini, on déduit de la continuité de la dérivation par rapport à t dans $\mathcal{D}'((0,1) \times (t_0, T))$ que $u_t^{\epsilon_k} \rightarrow u_t$ dans $\mathcal{D}'((0,1) \times (t_0, T))$. L'unicité de la limite entraîne $\chi = u_t$, et donc $u_t \in L^q((0,1) \times (t_0, T))$.

Maintenant nous allons prouver l'assertion (3.2.27). Pour cela nous avons besoin d'une estimation uniforme de u^ϵ en norme $L^2(0, T; H^2(0, 1))$ que nous établissons comme suit. En posant $\epsilon = \frac{1}{p}$ et en répétant le raisonnement que nous avons fait pour établir l'estimation (3.2.4), nous obtenons l'estimation suivante pour u^ϵ :

$$\int_0^T \int_0^1 (u^\epsilon)(u_t^\epsilon)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 ((u_x^\epsilon(x, T))^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [u_x^\epsilon(x)]^2 dx. \quad (3.2.29)$$

De l'item iii) du lemme 3.2.3 nous déduisons que $\|\sqrt{u} u_t^\epsilon\|_{L^2(Q_T)}$ est uniformément borné. Les majorations uniformes de $\|u^\epsilon\|_{C^0(\overline{Q_T})}$ et de $\|u_x^\epsilon\|_{C^0(\overline{Q_T})}$ (voir (3.2.14) et (3.2.26)) et l'équation (3.2.11) impliquent alors qu'il existe une constante C indépendante de ϵ telle que

$$\|u^\epsilon\|_{L^2(0, T; H^2(0, 1))} \leq C. \quad (3.2.30)$$

Grâce au lemme 3.2.6 et aux estimations (3.2.14) et (3.2.30), nous pouvons répéter la même argumentation que celle développée dans la démonstration du théorème 3.2.1 pour la famille de solutions du problème (3.2.1)-(3.2.3) et nous obtenons que la famille $\{u^\epsilon\}_{0 < \epsilon < \frac{1}{2}}$ est équicontinue et équibornée sur $\overline{Q_T}$. Le théorème d'Ascoli-Arzelà fournit l'existence d'une fonction $u_1 \in C^0(\overline{Q_T})$ et l'existence d'une sous-suite $\{p_k\}$ extraite de la suite $\{p\}_{p>2}$ telle que en posant $\epsilon_k = \frac{1}{p_k}$ on ait la convergence uniforme dans $\overline{Q_T}$ de la suite u^{ϵ_k} vers u_1 lorsque k tend vers l'infini.

La suite $\{u^\epsilon\}$ étant monotone, elle possède au plus une valeur d'adhérence. On a donc $u_1 = u$ et de plus c'est toute la suite $\{u^\epsilon\}$ qui converge vers u uniformément dans $\overline{Q_T}$. L'assertion (3.2.27) sera prouvée si on montre que $u \in L^2(0, T; H^2(0, 1))$.

Il nous reste à montrer que $u \in L^2(0, T; H^2(0, 1))$ et l'assertion (3.2.28). Des propriétés de compacité séquentielle de la boule unité d'un espace de Banach réflexif et séparable rappelées précédemment et des estimations (3.2.14) et (3.2.30), on déduit l'existence d'une

fonction u_1 appartenant à $L^2(0, T; H^2(0, 1))$ et l'existence d'une sous-suite $\{p_l\}$ extraite de la suite $\{p\}_{p \geq 2}$ telle que en posant $\epsilon_l = \frac{1}{p_l}$ on ait la convergence faible de la suite u^{ϵ_l} vers u_1 dans $L^2(0, T; H^1(0, 1))$ et dans $L^2(0, T; H^2(0, 1))$ lorsque l tend vers l'infini. La convergence de u^{ϵ} vers u uniformément dans $\overline{Q_T}$ implique la convergence de u^{ϵ_l} vers u dans $\mathcal{D}'(Q_T)$ lorsque l tend vers l'infini. La convergence faible de u^{ϵ_l} vers u_1 dans $L^2(0, T; H^1(0, 1))$ implique la convergence dans $\mathcal{D}'(Q_T)$ lorsque l tend vers l'infini. L'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(Q_T)$ implique $u_1 = u$. De l'unicité de la fonction limite u et de la propriété: de toute sous-suite de la suite $\{u^{\epsilon}\}$ on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $L^2(0, T; H^1(0, 1))$ vers la fonction u , on en déduit que c'est toute la suite u^{ϵ} qui converge faiblement dans $L^2(0, T; H^1(0, 1))$ vers u . Le lemme 3.2.7 est démontré.

□

Montrons maintenant que la fonction u dont l'existence est établie par le lemme 3.2.7 est l'unique solution faible du problème (P) appartenant à $L^2(0, T; H^2(0, 1))$. Multipliant l'équation (3.2.11) par φ et intégrant par parties, il vient:

$$-\int_0^1 (u_t(x))^2 \varphi(x, 0) dx + \int_{Q_T} (u^{\epsilon})^2 \varphi_t dx dt + 2 \int_{Q_T} u_x^{\epsilon} \varphi_x dx dt = 0 \quad \forall \varphi \in W_2^{1,1}(Q_T). \quad (3.2.31)$$

Les propriétés iii) du lemme 2.2.3, (2.3.27) et (2.3.28) permettent de passer à la limite dans l'expression (3.2.31), ce qui prouve que u est une solution faible du problème (P). Le théorème 3.2.2 est démontré.

□

3.3. Schéma numérique, majorations d'erreurs.

Dans ce qui suit, afin de simplifier les calculs nous supposons que $u_1(t) = b$ une constante positive. Nous introduisons le problème approché (P_h^r), nous montrons que c'est un problème bien posé, puis nous établissons des estimations a priori pour la solution de ce problème. Enfin nous démontrons une estimation de l'erreur entre la solution faible du problème continu (P) et la solution du problème approché (P_h^r).

Soit N et m deux entiers positifs. On pose:

$$\tau = \frac{T}{N}, \quad t_n = n\tau, \quad 0 \leq n \leq N$$

$$h = \frac{1}{m+1}, \quad x_i = ih, \quad 0 \leq i \leq m+1.$$

Si c est une constante donnée, nous définissons les espaces V_h , $V_h(c)$, et $W_h^r(c)$ par:

$$V_h = \{\varphi(s) \in C^0[0, 1]; \quad \varphi|_{[x_i, x_{i+1}]} \text{ est un polynôme de degré 1}\};$$

$$V_h(c) = \{\varphi \in V_h; \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = c\};$$

$$W_h^r(c) = \{\varphi(\cdot, \cdot) \in L^2(0, T; C^0([0, 1])); \quad \varphi|_{[t_{n-1}, t_n]} = \varphi^n \in V_h(c),$$

$$1 \leq n \leq N\}.$$

Au produit scalaire (\cdot, \cdot) et à la norme $\|\cdot\|$ usuels dans $L^2(0, 1)$, nous associons le semi-produit scalaire discret $(\cdot, \cdot)_h$ et la semi-norme $\|\cdot\|_h$ définis par:

$$(u, v)_h = h \sum_{i=1}^m u(x_i)v(x_i) + \frac{h}{2} \left\{ u(x_{m+1})v(x_{m+1}) + u(x_0)v(x_0) \right\};$$

$$\|v\|_h^2 = (v, v)_h \quad \forall u, v \in C^0([0, 1]).$$

Soit γ la fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^+ définie par: $\gamma(s) = \frac{1}{2}s^2$.

Nous définissons le problème approché (P_h^r) de la façon suivante:

pour $n = 0, 1, \dots, N$ trouver $U^n \in V_h(b)$, $U^n \geq 0$, tel que:

$$(\gamma(U^{n+1}) - \gamma(U^n), \varphi_h)_h + \tau a(U^{n+1}, \varphi_h) = 0, \quad \forall \varphi_h \in V_h(0), \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

$$U^0 = r_h u_0, \tag{3.3.1}$$

$$\text{où} \quad a(\varphi, \psi) = \int_0^1 \varphi_x \psi_x dx,$$

et où r_h désigne l'opérateur d'interpolation usuel dans V_h , c'est-à-dire:

$$r_h \varphi \in V_h, \quad r_h \varphi(x_i) = \varphi(x_i), \quad 0 \leq i \leq m+1, \quad \forall \varphi \in C^0([0, 1]). \quad (3.3.2)$$

Dans ce qui suit, si $w \in V_h$, on désignera par w_i la valeur $w(x_i)$ pour tout i tels que $0 \leq i \leq m+1$.

Le lemme suivant donne l'existence et l'unicité de la solution du problème (P_h^r) .

Lemme 3.3.1. *Supposons que les hypothèses HP1, HP2 et HP3 sont satisfaites. Alors, le problème (P_h^r) admet une unique solution $U^n \in V_h(b)$ pour $0 \leq n \leq N$ qui vérifie de plus: $U_i^n > 0$ pour $1 \leq i \leq m+1$ et $0 \leq n \leq N$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence. Pour $n = 0$, U^0 est donné par $U^0 = r_h u_0$, où u_0 est défini à l'hypothèse HP3, et on a: $U_i^0 > 0$ pour $1 \leq i \leq m+1$. L'hypothèse de récurrence s'exprime par: si pour $n \geq 0$ il existe un unique $U^n \in V_h(b)$ tel que $U_i^n > 0$ pour $1 \leq i \leq m+1$ solution de l'équation:

$$(\gamma(U^n) - \gamma(U^{n-1}), \varphi_h)_h + \tau a(U^n, \varphi_h) = 0, \quad \forall \varphi_h \in V_h(0),$$

alors il existe un unique $U^{n+1} \in V_h(b)$ tel que $U_i^{n+1} > 0$ pour $1 \leq i \leq m+1$ solution de l'équation:

$$(\gamma(U^{n+1}) - \gamma(U^n), \varphi_h)_h + \tau a(U^{n+1}, \varphi_h) = 0, \quad \forall \varphi_h \in V_h(0).$$

Montrons que l'hypothèse de récurrence est satisfaite. Pour cela on doit résoudre le problème suivant:

Trouver $w \in V_h(b)$ tel que:

$$\begin{aligned} (\gamma(w), \varphi_h)_h + \tau a(w, \varphi_h) &= (\gamma(U^n), \varphi_h)_h \quad \forall \varphi_h \in V_h(0), \\ \text{où } U_i^n &> 0, \quad 1 \leq i \leq m+1, \quad U_0^n = 0, \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

En posant $w_i = w(x_i)$, le problème devient:

trouver $\{w_i\}_{i=1}^m$ tels que:

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} w_i^2 + \frac{\tau}{h} (-w_{i+1} + 2w_i - w_{i-1}) &= \frac{h}{2} (U_i^n)^2, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m, \\ w_{m+1} &= b, \quad w_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

L'existence de solutions positives pour le problème (3.3.4) est obtenue en considérant un problème de minimisation annexe. Nous définissons la fonctionnelle $z \rightarrow J(z)$ de \mathbf{R}^m dans \mathbf{R} par:

$$J(z) = \frac{1}{2} z^t A z + \frac{h}{6} \sum_{j=1}^m (z_j^+)^3 - \sum_{j=1}^m F_j z_j; \quad (3.3.5)$$

$$\text{où } F_j = \frac{h}{2} (U_j^n)^2, \quad 1 \leq j \leq m-1, \quad F_m = \frac{h}{2} (U_m^n)^2 + \frac{\tau b}{h}, \quad z_j^+ = \max(z_j, 0).$$

Ici A est la matrice tri-diagonale ayant $\frac{2\tau}{h}$ sur la diagonale et $\frac{\tau}{h}$ sur la sur et la sous-diagonale.

La fonctionnelle $J(\cdot)$ est strictement convexe, continue et $J(z)$ tend vers l'infini avec la norme Euclidienne du vecteur z . Le problème de minimisation:

Trouver $\tilde{w} \in \mathbb{R}^m$ tel que:

$$J(\tilde{w}) = \inf_{z \in \mathbb{R}^m} J(z)$$

admet donc une unique solution \tilde{w} (voir théorème 8.2.1 p. 175 dans Ciarlet [6]). D'autre part, la fonctionnelle $J(\cdot)$ est différentiable et on a:

$$J'_j(z) = (Az)_j + \frac{h}{2}(z_j^+)^2 - F_j.$$

La solution \tilde{w} du problème de minimisation vérifie donc (voir théorème 7.2.1 p. 146 dans [6]):

$$(A\tilde{w})_j + \frac{h}{2}(\tilde{w}_j^+)^2 - F_j = 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq m. \quad (3.3.6)$$

Soit la matrice B définie par:

$$\begin{aligned} B_{ii} &= A_{ii} + \frac{h}{2}\tilde{w}_i^+ \\ B_{ij} &= A_{ij} \quad i \neq j \quad 1 \leq i, j \leq m. \end{aligned}$$

En remarquant que $(\tilde{w}_i^+)^2 = \tilde{w}_i \tilde{w}_i^+$, nous en déduisons que:

$$(B\tilde{w})_j = F_j, \text{ pour } 1 \leq j \leq m. \quad (3.3.7)$$

La matrice B est monotone et les F_j sont positifs, les \tilde{w}_j , pour $1 \leq j \leq m$, sont donc positifs, et la relation (3.3.6) devient:

$$(A\tilde{w})_j - F_j + \frac{h}{2}(\tilde{w}_j)^2 = 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq m.$$

Le problème (3.3.3) admet donc une solution positive.

Pour montrer l'unicité de la solution positive du problème (3.3.1), supposons l'existence de deux solutions positives w^1 , w^2 pour le problème (3.3.3). Un calcul élémentaire conduit à:

$$(\gamma(w^1) - \gamma(w^2), \varphi_h)_h + \tau a(w^1 - w^2, \varphi_h) = 0, \quad \forall \varphi_h \in V_h(0).$$

En remplaçant φ_h par $w^1 - w^2$, il vient:

$$(\gamma(w^1) - \gamma(w^2), w^1 - w^2)_h + \tau a(w^1 - w^2, w^1 - w^2) = 0,$$

or

$$(\gamma(w^1) - \gamma(w^2), w^1 - w^2)_h = \frac{1}{2}((w^1 - w^2)(w^1 + w^2), w^1 - w^2)_h \geq 0.$$

Nous en déduisons $a(w^1 - w^2, w^1 - w^2) = 0$, et puisque la semi-norme de H^1 , $|\varphi|_{H^1(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 |\varphi_x|^2 dx}$ est une norme sur $V_h(0)$, nous avons $w^1 = w^2$, ce qui prouve l'unicité. Le lemme 3.3.1 est démontré.

□

Remarque 3.3.1

Si nous supprimons la condition $U^n \geq 0$ dans la définition du problème (P_h^r) , l'existence d'une solution devient un problème ouvert. Nous avons une réponse dans le cas où $m = 1$, ($h = \frac{1}{2}$). Pour ce cas, le problème (3.3.4) s'écrit:

$$w_1^2 + 8\tau(2w_1 - b) = (U_1^n)^2,$$

qui a une solution positive et une solution négative.

Maintenant nous établissons des estimations a priori pour la famille $\{U^n\}_{n=1}^N$. On a:

Lemme 3.3.2. *Supposons que les hypothèses HP1, HP2 et HP3 sont satisfaites. Alors, la famille $\{U^n\}_{n=1}^N$ solution du problème (P_h^r) vérifie les inégalités suivantes:*

$$\|U^n\|_{L^\infty(0,1)} \leq \max(\|U^0\|_{L^\infty(0,1)}, b), \text{ pour } 1 \leq n \leq N; \quad (3.3.9)$$

$$\tau \sum_{n=1}^{n_0} \|U_x^n\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C \|U_x^0\|_{L^2(0,1)}^2, \text{ pour } 1 \leq n_0 \leq N, \quad (3.3.10)$$

où C est une constante indépendante de h et τ .

Démonstration. Dans la relation (3.3.7), nous remplaçons \hat{w} par U^{n+1} . Il vient:

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} U_i^{n+1} (U_i^{n+1})^+ + \frac{\tau}{h} (-U_{i+1}^{n+1} + 2U_i^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}) &= \frac{h}{2} U_i^{n2}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (3.3.11) \\ U_{m+1}^{n+1} &= b, \quad U_0^{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Soit j l'indice tel que:

$$U_j^{n+1} = \sup_{1 \leq i \leq m+1} U_i^{n+1}.$$

Si $j = m+1$ alors l'inégalité (3.3.9) est démontrée. Si $1 \leq j \leq m$, on a alors

$$-U_{j+1}^{n+1} + 2U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1} \geq 0,$$

d'où nous déduisons:

$$U_j^{n+1} (U_j^{n+1})^+ \leq (U_j^n)^2.$$

Les U_i^{n+1} étant non négatifs, pour $1 \leq i \leq m$ nous obtenons:

$$U_j^{n+1} \leq U_j^n \leq \sup_{1 \leq i \leq m} U_i^n,$$

ce qui induit:

$$\sup_{1 \leq i \leq m+1} U_i^{n+1} \leq \max(\sup_{1 \leq i \leq m} U_i^n, b);$$

d'où l'inégalité (3.3.9).

Dans la relation (3.3.1) nous remplaçons φ_h par $U^{n+1} - U^n \in V_h(0)$, et pour n_0 , $1 \leq n_0 \leq N$ donné nous sommions sur les indices n , pour $0 \leq n \leq n_0 - 1$:

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} \left\{ (\gamma(U^{n+1}) - \gamma(U^n), U^{n+1} - U^n)_h + \tau a(U^{n+1}, U^{n+1} - U^n) \right\} = 0.$$

Le premier terme du membre de gauche est non négatif puisque U^n et U^{n+1} sont non négatifs, et puisque

$$(\gamma(a_1) - \gamma(a_2))(a_1 - a_2) = \frac{1}{2}((a_1 - a_2)^2(a_1 + a_2)) \geq 0 \quad \text{pour } a_1, a_2 \geq 0.$$

Nous obtenons donc:

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} \left\{ \|U_x^{n+1}\|_{L^2(0,1)}^2 - \|U_x^n\|_{L^2(0,1)}^2 + \|U_x^{n+1} - U_x^n\|_{L^2(0,1)}^2 \right\} \leq 0,$$

d'où la majoration

$$\|U_x^{n_0}\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \|U_x^0\|_{L^2(0,1)}^2, \quad \forall n_0, 1 \leq n_0 \leq N, \quad (3.3.12)$$

qui permet de déduire (3.3.10). Le lemme 3.3.2 est démontré.

□

L'utilisation du semi-produit scalaire discret dans le schéma nous conduit à considérer l'erreur liée à la quadrature numérique que nous avons introduite. Pour des fonctions v, w continues sur $[0, 1]$ nous définissons l'erreur due à la quadrature numérique par:

$$E_h(v, w) = (v, w)_h - \int_0^1 v w \, dx.$$

Nous avons alors le résultat suivant:

Lemme 3.3.3. Pour $p \geq 2$ on a:

$$|E_h(v^p, w)| \leq Ch^2 \left\{ \|v^{p-1}\|_{L^\infty(0,1)} \|v_x\|_{L^2(0,1)} \|w_x\|_{L^2(0,1)} + \|v^{p-2}\|_{L^\infty(0,1)} \|v_x\|_{L^2(0,1)}^2 \|w\|_{L^\infty(0,1)} \right\} \quad \forall v, w \in V_h(b).$$

Démonstration. Nous utilisons le procédé classique exposé par exemple dans Ciarlet [7]. Nous écrivons:

$$E_h(v^p, w) = \sum_{i=0}^m \left(\frac{h}{2} \{ (v^p w)(x_i) + (v^p w)(x_{i+1}) \} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} v^p w \, dx \right). \quad (3.3.13)$$

En utilisant le changement de variable $x = \frac{1+\xi}{2}x_{i+1} + \frac{1-\xi}{2}x_i$, et le changement de fonction $\hat{v}(\xi) = v(x(\xi))$, on a:

$$\frac{h}{2} \left[(v^p w)(x_i) + (v^p w)(x_{i+1}) \right] - \int_{x_i}^{x_{i+1}} v^p w \, dx = \frac{h}{2} \left[(\hat{v}^p \hat{w})(-1) + (\hat{v}^p \hat{w})(+1) - \int_{-1}^{+1} \hat{v}^p \hat{w} \, d\xi \right].$$

Introduisons la forme linéaire continue L de $H^2(-1, +1)$ dans \mathbb{R} définie par:

$$L : H^2(-1, +1) \rightarrow \mathbb{R} \\ \hat{g} \mapsto \left[\hat{g}(-1) + \hat{g}(+1) - \int_{-1}^{+1} \hat{g}(\xi) \, d\xi \right],$$

et notons \hat{c}_1 sa norme, c'est-à-dire

$$\hat{c}_1 = \sup_{\substack{\hat{g} \in H^2(-1, +1) \\ \|\hat{g}\|_{H^2(-1, +1)} = 1}} L(\hat{g}).$$

La fonction $\hat{v}^p \hat{w}$ appartient à $H^2(-1, +1)$, et on a:

$$\frac{h}{2} \left[(v^p w)(x_i) + (v^p w)(x_{i+1}) \right] - \int_{x_i}^{x_{i+1}} v^p w \, dx = \frac{h}{2} L(\hat{v}^p \hat{w}).$$

Par ailleurs, la forme $L(\cdot)$ s'annulant sur $P^1([-1, +1])$, l'ensemble des polynômes de degré un sur $[-1, +1]$, le lemme de Bramble-Hilbert (voir [7] p. 192) fournit l'existence d'une constante \tilde{C} telle que:

$$|L(\hat{g})| \leq \tilde{C} \hat{c}_1 \left\| \frac{d^2 \hat{g}}{d\xi^2} \right\|_{L^2(-1, +1)}.$$

Si on pose $\hat{g} = \hat{v}^p \hat{w}$, utilisant la formule de Leibniz et le fait que \hat{v} et \hat{w} sont des polynômes de degré un, on a:

$$\frac{d^2 \hat{g}}{d\xi^2} = p(p-1) \hat{v}^{p-2} (\hat{v}_\xi)^2 \hat{w} + 2p \hat{v}^{p-1} \hat{v}_\xi \hat{w}_\xi.$$

De plus les majorations suivantes ont lieu:

$$\begin{aligned} \|\hat{v}^{p-1} \hat{v}_\xi \hat{w}_\xi\|_{L^2(-1, +1)} &\leq \|\hat{v}^{p-1}\|_{L^\infty(-1, +1)} \|\hat{v}_\xi\|_{L^2(-1, +1)} \|\hat{w}_\xi\|_{L^2(-1, +1)} \\ &\leq C_2 h \|v^{p-1}\|_{L^\infty(x_i, x_{i+1})} \|v_x\|_{L^2(x_i, x_{i+1})} \|w_x\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}; \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

où la constante C_2 ne dépend pas de h , et

$$\begin{aligned} \|\hat{v}^{p-2}(\hat{v}_\xi)^2 \hat{w}\|_{L^2(-1,+1)} &\leq \|\hat{v}^{p-2}\|_{L^\infty(-1,+1)} \|\hat{v}_\xi\|_{L^2(-1,+1)}^2 \|\hat{w}\|_{L^\infty(-1,+1)} \\ &\leq C_3 h \|v^{p-2}\|_{L^\infty(x_i, x_{i+1})} \|v_x\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \|w\|_{L^\infty(x_i, x_{i+1})}, \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

où la constante C_3 ne dépend pas de h . En combinant la relation (3.3.13), l'estimation de $L(\cdot)$ et les estimations (3.3.14), (3.3.15), nous obtenons la majoration annoncée. Le lemme (3.3.3) est démontré.

□

Estimation d'erreur

Afin d'obtenir une estimation de l'erreur, nous utilisons une méthode variationnelle due à Nochetto [15] qui permet d'obtenir une estimation de stabilité en norme L^2 , et qui est fondée sur une intégration par parties en temps. Avant d'expliciter cette méthode, nous introduisons les opérateurs de projection dont nous aurons besoin.

Pour c une constante donnée, nous dénotons par $V(c)$ le sous-espace de $H^1(0, 1)$ défini par:

$$V(c) = \{v \in H^1(0, 1); \quad v(0) = 0; \quad v(1) = c\},$$

et nous définissons les opérateurs de projection Π_h et Π_h^τ par:

$$\begin{aligned} \Pi_h : V(c) &\rightarrow V_h(c) \\ v &\mapsto \Pi_h v \quad \text{défini par: } a(v - \Pi_h v, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in V_h(0). \end{aligned}$$

$$\Pi_h^\tau : L^2(0, T; V(c)) \rightarrow W_h^\tau(c)$$

$$w \mapsto \Pi_h^\tau w \quad \text{défini par: } \Pi_h^\tau w|_{(t_n, t_{n+1}]} = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Pi_h w(\cdot, t) dt,$$

En particulier, si u est la solution faible du problème (P) dont l'existence est fournie par le théorème 3.2.1, nous noterons Y l'élément de $W_h^\tau(b)$ défini par $Y = \Pi_h^\tau u$.

Nous définissons d'autre part l'opérateur q^τ , opérant sur $C^0(\overline{Q_T})$ par:

$$\begin{aligned} q^\tau w|_{(t_n, t_{n+1}]} &= w(\cdot, t_{n+1}) \text{ que nous écrirons aussi } w^{n+1}(\cdot), \quad 0 \leq n \leq N-1; \\ (q^\tau w)(\cdot, 0) &= w(\cdot, 0) = w^0. \end{aligned}$$

Finalement, $U \in W_h^\tau(b)$ est défini par:

$$U|_{(t_n, t_{n+1}]} = U^{n+1}, \text{ pour } 0 \leq n \leq N-1,$$

où $U^{n+1} \in V_h(b)$ est défini par le schéma (3.3.1).

Avant d'énoncer le théorème de majoration d'erreur, montrons comment une inégalité de

stabilité en norme L^2 peut être obtenue sur une version continue du schéma. Dans les quelques lignes qui suivent nous supposons donc que \tilde{u} est une fonction régulière telle que $\tilde{u} \geq \beta x$ dans Q_T et que $b = 0$. Un analogue continu du schéma (3.3.1) s'écrit :

$$(\gamma(\tilde{u})_t, \varphi) + a(\tilde{u}, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \text{ régulière}, \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0.$$

Nous intégrons en temps entre 0 et $t \leq T$ et nous choisissons :

$$\varphi(x, s) = \begin{cases} 0, & \text{pour } t \leq s \leq T \\ v(x, s) = \int_s^t \tilde{u}(x, \sigma) d\sigma, & \text{pour } 0 \leq s \leq t. \end{cases}$$

On obtient :

$$\int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial s} \gamma(\tilde{u}), \int_s^t \tilde{u} d\sigma \right) ds + \int_0^t a(\tilde{u}, \int_s^t \tilde{u} d\sigma) ds = 0.$$

Le premier terme du membre de gauche s'écrit en intégrant par parties :

$$\left(\gamma(\tilde{u}), \int_s^t \tilde{u} d\sigma \right) \Big|_0^t + \int_0^t (\gamma(\tilde{u}), \tilde{u}) ds = -(\gamma(\tilde{u}(\cdot, 0)), \int_0^t \tilde{u} d\sigma) + \int_0^t \int_0^1 \frac{\tilde{u}^3}{2} dx ds.$$

On a $\frac{\partial v}{\partial s} = -\tilde{u}$, il s'ensuit que le deuxième terme du membre de gauche s'écrit :

$$\int_0^t -a\left(\frac{\partial v}{\partial s}, v\right) ds = \int_0^t \int_0^1 -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial s} \frac{\partial v}{\partial x} dx ds = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2(x, 0) dx,$$

car $v(x, t) = 0$. On en déduit :

$$\int_0^t \int_0^1 \tilde{u}^3 dx ds + a\left(\int_0^t \tilde{u}(\cdot, s) ds, \int_0^t \tilde{u}(\cdot, s) ds\right) = \int_0^1 [\tilde{u}_0^2(x) \int_0^t \tilde{u}(x, s) ds] dx.$$

L'inégalité de Poincaré permet d'écrire :

$$\|\psi\|_{L^2(0,1)}^2 \leq a(\psi, \psi) \quad \forall \psi \in H_0^1(0, 1);$$

on en déduit les inégalités :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\int_0^t \tilde{u}(x, s) ds \right]^2 dx &\leq a\left(\int_0^t \tilde{u}(x, s) ds, \int_0^t \tilde{u}(x, s) ds\right); \\ \int_0^t \int_0^1 \tilde{u}^3 dx ds + \frac{1}{2} a\left(\int_0^t \tilde{u}(\cdot, s) ds, \int_0^t \tilde{u}(\cdot, s) ds\right) &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{u}_0^4(x) dx. \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant la propriété $\tilde{u}(x, t) \geq \beta x$, pour $0 \leq t < T$; $0 \leq x \leq 1$, ce qui entraîne que pour tout z , $0 < z < 1$ on a :

$$\beta z \int_0^1 \tilde{u}^2 dx - \beta z \int_0^z \tilde{u}^2 dx = \beta z \int_z^1 \tilde{u}^2 dx \leq \int_z^1 \tilde{u}^3 dx \leq \int_0^1 \tilde{u}^3 dx.$$

Nous obtenons finalement l'inégalité :

$$\begin{aligned} \beta z \int_0^1 \int_0^t \tilde{u}^2(x, s) ds dx + \frac{1}{2} a\left(\int_0^t \tilde{u}(\cdot, s) ds, \int_0^t \tilde{u}(\cdot, s) ds\right) \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{u}_0^4(x) dx + \beta z \int_0^t \int_0^z \tilde{u}^2 dx dt. \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

L'égalité (3.3.16) permet de contrôler la norme $L^2(Q_T)$ de \tilde{u} avec la donnée initiale et un terme qui sera facilement estimable pour des z petits. C'est d'une inégalité analogue dont nous aurons besoin pour la solution du problème approché.

Théorème 3.3.1. On suppose les hypothèses *HP1*, *HP2* et *HP3* satisfaites. Soit u la solution faible du problème (P) appartenant à $L^2(0, T; H^2(0, 1))$ et soit $U \in W_h^r$ la solution du problème (P_h^r) . Alors on a l'estimation suivante:

$$\|U - u\|_{L^2(Q_T)} \leq C\left(\frac{\tau}{h} + h^{\frac{1}{2}}\right),$$

où la constante C est indépendante de h et τ .

Démonstration. L'existence de u solution faible du problème (P) appartenant à $L^2(0, T; H^2(0, 1))$ est donnée par le théorème 3.2.1; l'existence de $U \in W_h^r$ la solution du problème (P_h^r) est donnée par le lemme 3.2.1.

D'abord nous établissons une inégalité de stabilité discrète analogue à l'inégalité (3.3.16). Cette inégalité nous permettra de contrôler la différence entre la solution approchée U et l'interpolation $\Pi_h^r u$ de la solution exacte u dans W_h^r .

Pour tout n tel que $0 \leq n \leq N-1$, on peut écrire:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\gamma(u)_t, \varphi) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} a(u, \varphi) dt = 0, \quad \forall \varphi \in V_h(0), \quad \gamma(u)(x, 0) = \gamma(u_0)(x),$$

ce qui devient en utilisant les notations introduites précédemment, et en sommant de $n = 0$ à $n = n_0 - 1$:

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} (\gamma(u^{n+1}) - \gamma(u^n), \varphi^{n+1}) + \tau \sum_{n=0}^{n_0-1} a(Y^{n+1}, \varphi^{n+1}) = 0, \quad \forall \varphi \in W_h^r(0); \quad 1 \leq n_0 \leq N;$$

$$\gamma(u^0) = \gamma(u_0). \quad (3.3.18)$$

Sommant sur n les relations (3.3.1), on obtient:

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} (\gamma(U^{n+1}) - \gamma(U^n), \varphi^{n+1})_h + \tau \sum_{n=0}^{n_0-1} a(U^{n+1}, \varphi^{n+1}) = 0; \quad \forall \varphi \in W_h^r(0), 1 \leq n_0 \leq N$$

$$\gamma(U^0) = \gamma(r_h u_0). \quad (3.3.19)$$

Si dans les relations (3.3.18) et (3.3.19) nous effectuons une intégration par parties discrète en temps, il vient:

$$-\sum_{n=1}^{n_0} (\gamma(u^n), \varphi^{n+1} - \varphi^n) + \tau \sum_{n=1}^{n_0} a(Y^n, \varphi^n) - (\gamma(u^0), \varphi^1) + (\gamma(u^{n_0}), \varphi^{n_0+1}) = 0;$$

$$-\sum_{n=1}^{n_0} (\gamma(U^n), \varphi^{n+1} - \varphi^n)_h + \tau \sum_{n=1}^{n_0} a(U^n, \varphi^n) - (\gamma(U^0), \varphi^1)_h + (\gamma(U^{n_0}), \varphi^{n_0+1})_h = 0.$$

Soustrayant membre à membre ces égalités, il vient:

$$\sum_{n=1}^{n_0} \left[-(\gamma(U^n) - \gamma(u^n), \varphi^{n+1} - \varphi^n) + \tau a(U^n - Y^n, \varphi^n) \right] =$$

$$\sum_{n=1}^{n_0} E_h(\gamma(U^n), \varphi^{n+1} - \varphi^n) - E_h(\gamma(U^0), \varphi^1) - (\gamma(U^0) - \gamma(u^0), \varphi^1) - (\gamma(U^{n_0}), \varphi^{n_0+1})_h +$$

$$(\gamma(u^{n_0}), \varphi^{n_0+1}) \quad \forall \varphi \in W_h^r(0); \text{ pour } 1 \leq n_0 \leq N.$$

Nous choisissons maintenant φ^n comme une intégrale discrète, entre les instants t_n et t_{n_0} , c'est-à-dire:

$$\varphi^n = \begin{cases} \tau \sum_{k=n}^{n_0} (U^k - Y^k) & \text{pour } 1 \leq n \leq n_0 \\ 0 & \text{pour } n_0 + 1 \leq n \leq N. \end{cases}$$

On a en particulier $\varphi^n \in V_h(0)$, $\varphi^{n+1} - \varphi^n = -\tau(U^n - Y^n)$. En définissant $\varphi \in W_h^r(0)$ par:

$$\varphi|_{(t-n, t_{n+1}]} = \varphi^{n+1},$$

il est licite d'utiliser φ comme fonction test dans l'expression précédente, et on obtient:

$$\begin{aligned} \tau \sum_{n=1}^{n_0} (\gamma(U^n) - \gamma(u^n), U^n - Y^n) + \tau^2 \sum_{n=1}^{n_0} a(U^n - Y^n, \sum_{k=n}^{n_0} (U^k - Y^k)) = \\ - \tau \sum_{n=1}^{n_0} E_h(\gamma(U^n), U^n - Y^n) - \tau \sum_{k=1}^{n_0} E_h(\gamma(U^0), U^k - Y^k) \\ - \tau \sum_{k=1}^{n_0} (\gamma(U^0) - \gamma(u^0), (U^k - Y^k)). \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

En définissant les quantités D_1, D_2, D_3, D_4 , et D_5 par:

$$\begin{aligned} D_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \tau \sum_{n=1}^{n_0} (\gamma(U^n) - \gamma(u^n), U^n - Y^n); \\ D_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \tau^2 \sum_{n=1}^{n_0} a(U^n - Y^n, \sum_{k=n}^{n_0} (U^k - Y^k)); \\ D_3 &\stackrel{\text{def}}{=} -\tau \sum_{n=1}^{n_0} E_h(\gamma(U^n), U^n - Y^n); \\ D_4 &\stackrel{\text{def}}{=} -\tau \sum_{k=1}^{n_0} E_h(\gamma(U^0), U^k - Y^k); \\ D_5 &\stackrel{\text{def}}{=} -\tau \sum_{k=1}^{n_0} (\gamma(U^0) - \gamma(u^0), (U^k - Y^k)); \end{aligned}$$

l'égalité (3.3.20) s'écrit encore de façon évidente:

$$D_1 + D_2 = D_3 + D_4 + D_5. \quad (3.3.21)$$

Si on dénote par \overline{D}_1 et par \tilde{D}_1 les quantités suivantes:

$$\begin{aligned} \overline{D}_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \tau \sum_{n=1}^{n_0} (\gamma(U^n) - \gamma(u^n), U^n - u^n); \\ \tilde{D}_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \tau \sum_{n=1}^{n_0} (\gamma(U^n) - \gamma(u^n), u^n - Y^n), \end{aligned}$$

le terme D_1 se décompose en: $D_1 = \overline{D_1} + \tilde{D}_1$. Nous souhaitons estimer D_1 en utilisant la minoration $D_1 \geq \overline{D_1} - |\tilde{D}_1|$. Pour cela nous nous intéressons d'abord au terme $\overline{D_1}$ puis au terme $|\tilde{D}_1|$.

On sait que $U^n \geq 0$. D'après le théorème 3.2.1, on a $u(x, t) \geq \beta x$ pour $0 \leq t \leq T$ et pour $0 \leq x \leq 1$, il est alors aisé d'en déduire les inégalités qui suivent:

$$\beta h \int_h^1 (U^n - u^n)^2 dx \leq \int_h^1 (U^n + u^n)(U^n - u^n)^2 dx \leq \int_0^1 (U^n + u^n)(U^n - u^n)^2 dx,$$

et d'obtenir la minoration suivante pour $\overline{D_1}$:

$$\begin{aligned} \frac{\beta h}{2} \tau \sum_{n=1}^{n_0} \int_0^1 (U^n - u^n)^2 dx &\leq \overline{D_1} + \frac{\beta h}{2} \tau \sum_{n=1}^{n_0} \int_0^h (U^n - u^n)^2 dx \\ &\leq \overline{D_1} + \beta h^2 \tau \sum_{n=1}^{n_0} (\|U^n\|_{L^\infty(0,1)}^2 + \|u^n\|_{L^\infty(0,1)}^2). \end{aligned}$$

Ce qui avec les résultats du lemme 3.3.2 et du théorème 3.2.1. permet d'établir que:

$$\frac{\beta h}{2} \|U - q^\tau u\|_{L^2(Q_{T_0})}^2 \leq \overline{D_1} + Ch^2. \quad (3.3.22)$$

Pour majorer \tilde{D}_1 , nous introduisons la quantité a_n que l'on définit par:

$$a_n = \begin{cases} \frac{\gamma(U^n) - \gamma(u^n)}{U^n - u^n} & \text{si } U^n \neq u^n \\ 0 & \text{si } U^n = u^n. \end{cases}$$

Remarquons que a_n satisfait: $a_n \in L^\infty(Q_T)$ uniformément en n .

Nous pouvons écrire:

$$(\gamma(U^n) - \gamma(u^n), u^n - Y^n) = \left(\left[(\gamma(U^n) - \gamma(u^n)) [U^n - u^n] \right]^{\frac{1}{2}}, a_n^{\frac{1}{2}} (u^n - Y^n) \right),$$

ce qui avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, induit l'estimation suivante:

$$|\tilde{D}_1| \leq \left[\tau \sum_{n=1}^{n_0} (\gamma(U^n) - \gamma(u^n), U^n - u^n) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\tau \sum_{n=1}^{n_0} \|a_n\|_{L^\infty(Q_T)} (u^n - Y^n, u^n - Y^n) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Posant $A = \max_{1 \leq n \leq N} \|a_n\|_{L^\infty(Q_T)}$, on obtient

$$|\tilde{D}_1| \leq \epsilon \overline{D_1} + \frac{A}{4\epsilon} \|q^\tau u - Y\|_{L^2(Q_{T_0})}^2, \quad (3.3.23)$$

où $\epsilon > 0$ est arbitraire et $T_0 = n_0 \tau$. Nous en déduisons (puisque $D_1 \geq \overline{D_1} - |\tilde{D}_1|$) la minoration:

$$\overline{D_1}(1 - \epsilon) - \frac{A}{4\epsilon} \|q^\tau u - Y\|_{L^2(Q_{T_0})}^2 \leq D_1.$$

Choisisant $\epsilon = \frac{1}{2}$ il vient en utilisant l'inégalité (3.3.22):

$$\frac{\beta h}{4} \|U - q^r u\|_{L^2(Q_{T_0})}^2 - \frac{A}{2} \|q^r u - Y\|_{L^2(Q_{T_0})}^2 \leq D_1 + \frac{Ch^2}{2}. \quad (3.3.24)$$

Considérons maintenant le terme D_2 de l'égalité (3.3.21); i.e

$$D_2 = \tau^2 \sum_{n=1}^{n_0} a(U^n - Y^n, \sum_{k=n}^{n_0} U^k - Y^k),$$

et posons $b_n = (U^n - Y^n)_x$. On a:

$$D_2 = \tau^2 \sum_{n=1}^{n_0} \int_0^1 b_n \sum_{k=n}^{n_0} b_k dx.$$

La forme quadratique $\sum_{n=1}^{n_0} b_n \sum_{k=n}^{n_0} b_k$ peut s'écrire sous la forme $b^t B b$ où $b^t = (b_1, \dots, b_{n_0})$ et où la matrice B vérifie:

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ \frac{1}{2} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq n_0.$$

En remarquant que les valeurs propres de B sont égales à $\frac{1}{2}$ (ordre de multiplicité $n_0 - 1$) et à $1 + \frac{n_0-1}{2}$ (ordre de multiplicité 1), nous obtenons la minoration:

$$\frac{1}{2} \|\tau \sum_{k=1}^{n_0} (U^k - Y^k)_x\|_{L^2(0,1)}^2 \leq D_2, \quad (3.3.25)$$

ce qui représente l'analogie du deuxième terme du membre de gauche de l'inégalité (3.3.16). Nous considérons maintenant le terme

$$D_3 = -\tau \sum_{n=1}^{n_0} E_h(\gamma(U^n), U^n - Y^n).$$

Le lemme 3.3.3 avec $p = 2$ fournit:

$$|E_h(\gamma(U^n), U^n - Y^n)| \leq Ch^2 \left\{ \|(U^n)\|_{L^\infty(0,1)} \|U_x^n\|_{L^2(0,1)} \|(U^n - Y^n)_x\|_{L^2(0,1)} + \|U_x^n\|_{L^2(0,1)}^2 \|U^n - Y^n\|_{L^\infty(0,1)} \right\}. \quad (3.3.26)$$

En utilisant la définition de Y^n ,

$$Y^n = \Pi_h^r u|_{(t_{n-1}, t_n)},$$

la régularité de la fonction u qui appartient à $C^0(\overline{Q_T}) \cap L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(0, 1))$, et la propriété $\|U^n\|_{L^\infty(0,1)} \leq C$ uniformément en n donnée au lemme 3.3.2, nous obtenons la majoration:

$$\|U^n - Y^n\|_{L^\infty(0,1)} \leq C \text{ uniformément en } n.$$

Le second membre de l'inégalité (3.3.26) est donc majoré par:

$$Ch^2 \left[\|U_x^n\|_{L^2(0,1)} \|(U^n - Y^n)_x\|_{L^2(0,1)} + \|U_x^n\|_{L^2(0,1)}^2 \right],$$

donc aussi par:

$$Ch^2 \left[\|U_x^n\|_{L^2(0,1)}^2 + \|Y_x^n\|_{L^2(0,1)}^2 \right],$$

où C désigne diverses constantes indépendantes de h et τ . En utilisant l'inégalité (3.3.10) du lemme 3.3.2 et la définition de Y^n , nous avons:

$$|D_3| \leq C_1 h^2, \quad (3.3.27)$$

où C_1 est une constante qui dépend de $\|U^0\|_{L^\infty(0,1)}$, $\|U_x^0\|_{L^\infty(0,1)}$, $\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))}$ et de b . Pour majorer le terme

$$D_4 = -\tau \sum_{k=1}^{n_0} E_h(\gamma(U^0), U^k - Y^k),$$

nous procédons de la même manière que précédemment pour estimer D_3 et nous obtenons:

$$|D_4| \leq C_2 h^2, \quad (3.3.28)$$

où C_2 est une constante du même type que C_1 .

Il reste maintenant à estimer le dernier terme $D_5 = -\tau \sum_{k=1}^{n_0} (\gamma(U^0) - \gamma(u_0), U^k - Y^k)$. Il n'est pas difficile d'obtenir à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz la majoration:

$$|D_5| \leq \frac{\tau}{2} \|U^0 + u^0\|_{L^\infty(0,1)} \|U^0 - u^0\|_{L^2(0,1)} \left\| \sum_{k=1}^{n_0} U^k - Y^k \right\|_{L^2(0,1)}.$$

Tirant profit de la propriété $u^0 \in W^{1,\infty}(0, 1)$, il est alors classique d'en déduire:

$$\|U^0 - u^0\|_{L^2(0,1)} \leq Ch; \quad \|U^0 + u^0\|_{L^\infty(0,1)} \leq C,$$

où C désigne diverses constantes indépendantes de h . Cela conduit à la majoration:

$$|D_5| \leq C_4 h \left\| \tau \sum_{k=1}^{n_0} U^k - Y^k \right\|_{L^2(0,1)},$$

qui se transforme grace à l'inégalité de Poincaré (puisque $(U^k - Y^k)(0) = 0$) en:

$$|D_5| \leq C_4 h \left\| \tau \sum_{k=1}^{n_0} U_x^k - Y_x^k \right\|_{L^2(0,1)}. \quad (3.3.29)$$

Combinant les relations (3.3.21) et (3.3.25) à (3.3.29), il vient:

$$\begin{aligned} \frac{\beta h}{4} \|U - q^\tau u\|_{L^2(Q_{T_0})}^2 - \frac{A}{2} \|q^\tau u - Y\|_{L^2(Q_{T_0})}^2 - \frac{Ch^2}{2} + \frac{1}{2} \|\tau \sum_{k=1}^{n_0} U_x^k - Y_x^k\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \\ (C_1 + C_2)h^2 + C_4 h \|\tau \sum_{k=1}^{n_0} U_x^k - Y_x^k\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

De cette dernière estimation nous en déduisons l'inégalité de stabilité en norme L^2 pour le schéma (3.3.1) analogue à l'inégalité (3.3.16):

$$\beta h \|U - q^\tau u\|_{L^2(Q_{T_0})}^2 + \|\tau \sum_{k=1}^{n_0} U_x^k - Y_x^k\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C_3(h^2 + 2A \|q^\tau u - Y\|_{L^2(Q_{T_0})}^2), \quad (3.3.30)$$

où $C_3 = 2C + 4C_+4C_2 + 4C_4$.

Il reste maintenant à estimer le terme $q^\tau u - Y$. Si on pose:

$$\begin{aligned} E_1^n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (u(\cdot, t_{n+1}) - u(\cdot, t)) dt; \\ E_2^n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (u(\cdot, t) - \Pi_h u(\cdot, t)) dt, \end{aligned}$$

on a

$$q^\tau u - Y|_{(t_n, t_{n+1})} = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (u(\cdot, t_{n+1}) - \Pi_h u(\cdot, t)) dt = E_1^n + E_2^n.$$

Nous calculons alors

$$\begin{aligned} \|E_1^n\|_{L^2(0,1)}^2 &= \frac{1}{\tau^2} \int_0^1 \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} u(x, t_{n+1}) - u(x, t) dt \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{\tau^2} \int_h^1 \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} u(x, t_{n+1}) - u(x, t) dt \right)^2 dx + \\ &\quad \frac{1}{\tau^2} \int_0^h \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} u(x, t_{n+1}) - u(x, t) dt \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Pour le premier terme du membre de droite nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} \int_h^1 \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} u(x, t_{n+1}) - u(x, t) dt \right)^2 dx &= \int_h^1 \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_t^{t_{n+1}} u_t(x, s) ds dt \right)^2 dx \\ &\leq \tau^3 \int_h^1 \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_t^2(x, t) dt dx. \quad (3.3.31) \end{aligned}$$

Pour le deuxième terme du membre de droite, la propriété i) du théorème 3.2.1 entraîne les inégalités suivantes:

$$0 \leq u(x, t) \leq Ch \text{ pour tout } 0 \leq x \leq h, \text{ et pour tout } 0 \leq t \leq T,$$

ce qui conduit à l'estimation:

$$\int_0^h \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} u(x, t_{n+1}) - u(x, t) dt \right)^2 dx \leq C\tau^2 h^3, \quad (3.3.32)$$

où C est une constante qui dépend de la solution exacte u mais qui est indépendante de τ et h . Utilisant la propriété iii) du théorème 3.2.1 avec $z = h$, les inégalités (3.3.31) et (3.3.32) impliquent:

$$\tau \sum_{n=0}^{n_0} \|E_1^n\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C \left(\frac{\tau^2}{h} + h^3 \right).$$

D'autre part il est bien connu que (voir [6] p. 138):

$$\|u(\cdot, t) - \Pi_h u(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq Ch^2 \|u\|_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}^2.$$

Ce qui permet d'obtenir

$$\|q^\tau u - Y\|_{L^2(Q_{T_0})}^2 \leq C \left(\frac{\tau^2}{h} + h^3 \right). \quad (3.3.33)$$

Combinant les inégalités (3.3.30) et (3.3.33) il vient:

$$\|U - q^\tau u\|_{L^2(Q_{T_0})}^2 \leq C \left(\frac{\tau^2}{h^2} + h \right), \quad (3.3.34)$$

pour tout $T_0 = n_0 \tau$, $n_0 \leq N$.

Utilisant les mêmes arguments que précédemment nous avons:

$$\|u - q^\tau u\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq C \left(\frac{\tau^2}{h} + h^3 \right).$$

L'inégalité triangulaire permet alors d'écrire:

$$\|U - u\|_{L^2(Q_T)} \leq C \left(\frac{\tau}{h} + h^{\frac{1}{2}} \right),$$

où la constante C ne dépend que de la solution exacte u , des données u_0 , u_1 et de Q_T . Le théorème 3.3.1 est démontré.

□

3.4. Algorithme pour calculer la solution du problème discret P_h^r .

A la section 2 nous avons remarqué que pour b une constante positive donnée, à chaque pas de temps, il était nécessaire de résoudre un problème de la forme:

Pour f donnée dans $C^0([0, 1])$, $f > 0$ dans $(0, 1)$,
trouver $w \in V_h(b)$, $w > 0$ dans $(0, 1)$ telle que:

$$a(w, v) + \left(\frac{1}{2}w^2, v\right)_h = (f, v)_h \quad \forall v \in V_h(0) \quad (3.4.1)$$

Pour résoudre le problème (3.4.1), nous proposons l'algorithme suivant:

Soit $w^0 \in V_h(b)$ donné tel que $w^0 > 0$ dans $(0, 1)$,
on définit la suite $\{w^k\}_{k \geq 0}$, $w^k \in V_h(b)$ par:

$$a(w^{k+1}, v) + \frac{1}{2}(w^{k+1}w^k, v)_h = (f, v)_h \quad \forall v \in V_h(0). \quad (3.4.2)$$

Les arguments de la démonstration du lemme 3.3.1 nous montre que le problème (3.4.2) admet une unique solution, et que cette solution est positive dans $(0, 1)$.

Avant d'énoncer le résultat de convergence pour l'algorithme proposé, nous introduisons quelques notations, qui nous seront utiles pour écrire la solution du problème (3.4.1) comme le point fixe d'une application.

Soit c une constante donnée, nous désignons par H_c l'espace affine $V_h(c)$ muni de la norme du maximum (c'est-à-dire que l'espace vectoriel associé H_0 est muni de la norme du maximum). Nous définissons l'application

$$S_f^b: H_b \rightarrow H_b \\ \varphi \mapsto \theta = S_f^b(\varphi)$$

de la façon suivante:

$$\theta \in V_h(b) \quad \text{est solution de:} \\ a(\theta, v) + \frac{1}{2}(\varphi\theta, v)_h = (f, v)_h \quad \forall v \in V_h(0). \quad (3.4.3)$$

Il n'est pas difficile de montrer que l'inclusion suivante est satisfaite:

Lemme 3.4.1. *Le domaine $\mathcal{D}(S_f^b)$ de l'application S_f^b satisfait:*

$$\mathcal{D}(S_f^b) \supset \{\varphi \in H_b; \inf \varphi \geq 0\}.$$

Il est immédiat de vérifier qu'avec les notations introduites, w^{k+1} peut être exprimé comme:

$$w^{k+1} = S_f^b(w^k),$$

et que la solution w du problème (3.4.1) satisfait:

$$w = S_f^b(w).$$

De plus, on a $w_j > 0$ pour $1 \leq j \leq m+1$, où $w_j = w(x_j)$ représentent les composantes de w .

Enonçons maintenant le principal résultat de cette section, c'est-à-dire, en quel sens l'algorithme (3.4.2) est convergent.

Théorème 3.4.1. Soit w la solution (positive dans $(0,1)$) du problème 3.4.1. Alors il existe un voisinage Γ_1 de w dans $L^\infty(0,1)$ tel que si w_0 est choisi dans Γ_1 , l'algorithme (3.4.2) converge.

Donnons la méthode pour démontrer le théorème 3.4.1. Nous voulons montrer que pour une certaine norme notée $||| \cdot |||$, le fait que $|||w - w_0|||$ soit suffisamment petit entraîne que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |||w - w^k||| \rightarrow 0.$$

Pour cela, il suffit de prouver qu'il existe une norme pour l'espace affine $V_h(b)$ rendant l'application $S_f^b(\cdot)$ localement contractante puisque w est un point fixe de l'application S_f^b .

Si l'application S_f^b admet une dérivée de Fréchet $DS_f^b(\cdot)$, sachant que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une norme notée $||| \cdot |||$ sur $V_h(0)$ telle que pour la norme d'opérateur subordonnée on ait :

$$|||DS_f^b(w)||| \leq \rho(DS_f^b(w)) + \epsilon,$$

où $\rho(DS_f^b(w))$ représente le rayon spectral de l'application $v \rightarrow DS_f^b(w).v$ (voir par exemple [6] p. 19), il suffit alors d'avoir $\rho(DS_f^b(w)) < 1$ pour que l'application $S_f^b(\cdot)$ soit localement contractante.

La démonstration du théorème 3.4.1 est donc une conséquence immédiate des lemmes qui suivent (voir par exemple Schartz [22]).

Maintenant nous nous intéressons à l'existence d'une dérivée au sens de Fréchet pour l'application S_f^b . Soit \bar{w} défini par :

$$\bar{w} = \inf_{j \geq 1} w_j,$$

alors nous avons le résultat suivant :

Lemme 3.4.2. Soit Γ le voisinage de w dans H_b défini par :

$$\Gamma = \{\varphi \in H_b; \quad \|w - \varphi\|_{\infty,(0,1)} < \frac{\bar{w}}{2}\}. \quad \text{Alors } S_f^b \in C^1(\Gamma) \text{ et } \forall \varphi \in \Gamma,$$

$DS_f^b(\varphi) \in \mathcal{L}(H_0; H_0)$ la dérivée de l'application S_f^b au point φ est définie par :

$$DS_f^b(\varphi).v = -S(\varphi).v S_f^b(\varphi) \forall v \in H_0, \quad (3.4.4)$$

où l'application linéaire continu $S(\varphi) : y \mapsto \psi = S(\varphi).y$ de $H_0 \rightarrow H_0$ est définie par :

$$a(\psi, v) + \frac{1}{2}(\varphi \psi, v)_h = \frac{1}{2}(y, v)_h, \quad \forall v \in V_h(0). \quad (3.4.5)$$

Démonstration. Pour $\varphi \in \Gamma$ soit $\tilde{\theta}$ et θ les fonctions de $V_h(b)$ définies par :

$$a(\tilde{\theta}, \psi) + \frac{1}{2}((\varphi + v)\tilde{\theta}, \psi)_h = (f, \psi)_h; \quad (3.4.6)$$

$$a(\theta, \psi) + \frac{1}{2}(\varphi \theta, \psi)_h = (f, \psi)_h; \quad \forall \psi \in V_h(0), \quad (3.4.7)$$

où $v \in H_0$ est un accroissement de φ , ce qui peut encore s'écrire

$$\theta = S_f^b(\varphi); \quad \tilde{\theta} = S_f^b(\varphi + v).$$

On remarquera que $\varphi \in \Gamma$ entraîne l'existence de $\theta \in V_h(b)$ avec $\theta > 0$ pour tout $x > 0$. Il en est de même pour $\tilde{\theta}$ dès que $\|v\|_{L^\infty(0,1)}$ est assez petit, puisque pour un tel v on a: $\varphi + v \geq 0$.

En soustrayant membre à membre les relations (3.4.6) et (3.4.7), on a:

$$a(\tilde{\theta} - \theta, \psi) + \frac{1}{2}(\varphi(\tilde{\theta} - \theta), \psi)_h = -\frac{1}{2}(v\tilde{\theta}, \psi)_h. \quad (3.4.8)$$

La relation (3.4.5) permet d'écrire

$$\tilde{\theta} - \theta = S(\varphi).(-v\tilde{\theta}) = -S(\varphi).v\theta - S(\varphi).v(\tilde{\theta} - \theta).$$

Si nous pouvons montrer que:

$$\|\tilde{\theta} - \theta\|_{L^\infty(0,1)} = O(\|v\|_{L^\infty(0,1)}), \quad (3.4.9)$$

alors nous aurons prouvé que (voir par exemple Schwartz [22], p. 197 pour une définition précise de la dérivée d'un opérateur d'un espace affine normé dans lui même):

$$DS_f^b(\varphi).v = -S(\varphi).v\theta \quad \forall v \in H_0,$$

c'est-à-dire la relation (3.4.4). La solution $\tilde{\theta} - \theta$ du problème (3.4.8) vérifie:

$$\|\tilde{\theta} - \theta\|_{H^1(0,1)} \leq C\|v\tilde{\theta}\|_h \leq \|v\|_{L^\infty(0,1)}\|\tilde{\theta}\|_h.$$

D'autre part en utilisant une version discrète de l'inégalité de Poincaré on a:

$$\|\tilde{\theta}\|_h \leq C\|\tilde{\theta}\|_{H^1(0,1)} \leq C\|f\|_h \leq \|f\|_{C^0([0,1])},$$

et nous obtenons

$$\|\tilde{\theta} - \theta\|_{H^1(0,1)} \leq C\|f\|_{C^0([0,1])}\|v\|_{L^\infty(0,1)}. \quad (3.4.10)$$

En utilisant l'inclusion $H^1(0,1) \hookrightarrow C^0([0,1])$, nous déduisons (3.4.9) de (3.4.10). Les définitions des applications $S_f^b(\cdot)$ et $S(\cdot)$ et l'expression de $DS_f^b(\varphi)$ montrent alors que $S_f^b(\cdot) \in C^1(\Gamma)$. Le lemme 3.4.2 est démontré.

□

Le lemme suivant fournit une estimation du rayon spectral de l'application $DS_f^b(w)$.

Lemme 3.4.3. Le rayon spectral $\rho(DS_f^b(w))$ de l'application $v \rightarrow DS_f^b(w).v$ de H_0 dans H_0 satisfait l'inégalité suivante:

$$\rho(DS_f^b(w)) \leq \frac{\|w\|_{L^\infty(0,1)}}{2\mu + \|w\|_{L^\infty(0,1)}}, \quad (3.4.11)$$

où

$$\mu = \inf_{q \in V_h(0), q \neq 0} \frac{a(q, q)}{(q, q)_h} > 0.$$

Démonstration. L'application $v \rightarrow DS_f^b(w).v$ est une application linéaire en dimension finie. Son rayon spectral est donc égal au maximum des modules de ses valeurs propres. Etudions donc ses valeurs propres, notées λ , associées aux fonctions propres notées p , c'est-à-dire $(\lambda, p) \in \mathbb{R} \times H_0$ tels que:

$$DS_f^b(w).p = \lambda p. \quad (3.4.12)$$

En utilisant (3.4.4), le fait que w est un point fixe de S_f^b et (3.4.12) on a:

$$-S(w).(pw) = \lambda p.$$

Posons $q = -\lambda p$. La définition 3.4.5 de l'opérateur $y \mapsto S(w).y$ permet d'écrire:

$q \in V_h(0)$ et vérifie

$$a(q, \psi) + \frac{1}{2}(wq, \psi)_h = \frac{1}{2}(pw, \psi)_h \quad \forall \psi \in V_h(0),$$

ce qui peut encore s'écrire si $\lambda \neq 0$

$q \in V_h(0)$ et vérifie

$$a(q, \psi) + \frac{1}{2}(w(1 + \frac{1}{\lambda})q, \psi)_h = 0 \quad \forall \psi \in V_h(0)$$

Posons $d = -\frac{1+\lambda}{2\lambda}$, nous avons:

$$a(q, \psi) = d(wq, \psi)_h \quad \forall \psi \in V_h(0).$$

On remarque que la forme bilinéaire $a(., .)$ est symétrique et que la forme bilinéaire $(w., .)_h$ est aussi symétrique, ce qui implique que les d sont réels et de plus ils sont positifs car $a(q, q) > 0$ et $w \geq 0$. Donc $-\frac{1+\lambda}{2\lambda} > 0$, c'est-à-dire $-1 < \lambda < 0$. Nous pouvons même préciser cette dernière inégalité en posant:

$$d_1 = \inf_{z \neq 0, z \in V_h(0)} \frac{a(z, z)}{(wz, z)_h}.$$

Alors les valeurs propres du problème (3.4.12) satisfont:

$$|\lambda| = \frac{1}{1+2d} \leq \frac{1}{1+2d_1}.$$

Or

$$d_1 \geq \frac{1}{\|w\|_{L^\infty(0,1)}} \inf_{z \neq 0; z \in V_h(0)} \frac{a(z, z)}{(z, z)_h}$$

c'est-à-dire $d_1 \geq \mu \|w\|_{L^\infty(0,1)}^{-1}$, d'où

$$|\lambda| \leq \frac{\|w\|_{L^\infty(0,1)}}{2\mu + \|w\|_{L^\infty(0,1)}}.$$

Le lemme 3.4.3 est ainsi démontré.

□

Remarque 3.4.1.

Le problème approché (3.3.1) pour un n fixé diffère du problème (3.4.1), nous devons remplacer dans le problème (3.4.1) le terme $(\frac{1}{2}w^2, v)_h$ par le terme $(\frac{1}{2\tau}w^2, v)_h$ pour obtenir le problème (3.3.1). En fait, le résultat de convergence donné par le théorème 3.4.1 reste valide si dans le problème (3.4.1) l'expression $(\frac{1}{2}w^2, v)_h$ est remplacée par: $(\frac{\alpha}{2}w^2, v)_h$ pour tout $\alpha > 0$. On doit simplement modifier la définition de μ . Dans le cas $\alpha = \frac{1}{\tau}$ on définit μ par:

$$\mu = \inf_{q \in V_h(0), q \neq 0} \frac{\tau a(q, q)}{(q, q)_h} = \tau \inf_{q \in V_h(0), q \neq 0} \frac{a(q, q)}{(q, q)_h}$$

Néanmoins, mentionons que pour le problème (3.3.1), lorsque h est fixé, μ dépend linéairement de τ . En conséquence, la vitesse de convergence décroît avec τ puisque le rayon spectral de $DS_f^b(w)$ est majoré par:

$$\rho(DS_f^b(w)) \leq \frac{\|w\|_{L^\infty(0,1)}}{2\mu + \|w\|_{L^\infty(0,1)}}$$

et tend vers un lorsque τ tend vers zéro.

3.5. Quelques remarques et généralisations..

Remarque 3.5.1.

Maintenant nous donnons quelques remarques qui concernent le problème en dimension d'espace égale à 1.

Le problème approché a été étudié en supposant que $u_1(t) = b$, où b est un réel donné. Les résultats que nous avons établis subsistent si b est remplacé par une fonction $t \mapsto b(t)$ vérifiant les hypothèses HP1 et HP2.

Si $u_0(x)$ ne vérifie plus l'hypothèse HP3, c'est-à-dire si on n'a pas l'existence d'une fonction $x \mapsto \beta x$ telle que: $u(x, t) \geq \beta x$, pour $0 \leq t < T$, et pour $0 \leq x \leq 1$, la majoration de l'erreur ne peut plus être établie avec la méthode que nous avons utilisée.

Pour $2 < p < \infty$ on peut généraliser le problème traité dans les sections 1 à 4 en remplaçant dans le problème (P) le terme uu_t par $u^{p-1}u_t$ et en définissant dans le problème (P_h^r) la fonction γ par $s \mapsto \gamma(s) = \frac{s^p}{p}$. De manière similaire à ce qui a été fait, on peut définir une solution faible dans $C^0(\overline{Q_T}) \cap L^2(0, T; H^1(0, 1))$ pour ce problème et montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible non négative dans $C^0(\overline{Q_T}) \cap L^2(0, T; H^1(0, 1)) \cap L^2(0, T; H^2(0, 1))$. Les résultats du théorème 3.2.1 subsistent à l'exception de l'item ii) qui devient:

$$\int_z^1 \int_0^1 (u_t)^2 dx dt \leq \frac{C}{z^{p-1}}, \forall z, 0 < z < 1, \text{ où } C \text{ est indépendante de } z.$$

L'existence de la solution approchée, définie en (3.3.3) est toujours assurée. Il suffit de remplacer le terme $\frac{h}{6} \sum_{j=1}^m (z_j^+)^3$ par $\frac{h}{p(p+1)} \sum_{j=1}^m (z_j^+)^{p+1}$ dans la fonctionnelle $z \mapsto J(z)$, définie en (3.3.5), et le lemme 3.3.2 concernant les majorations de stabilité reste vrai. Dans le théorème 3.3.1 de majoration d'erreur, l'inégalité (3.3.22) devient:

$$\frac{\beta h^{p-1}}{p} \|U - q^r u\|_{L^2(Q_{T_0})}^2 \leq \overline{D_1} + C h^2.$$

La majoration (3.3.34) devient:

$$\|U - q^r u\|_{L^2(Q_{T_0})}^2 \leq C \left(\frac{\tau^2}{h^{p-1}} + h^{3-p} \right),$$

d'où on déduit:

$$\|U - u\|_{L^2(Q_{T_0})} \leq C \left(\frac{\tau}{h^{\frac{p-1}{2}}} + h^{\frac{3-p}{2}} \right). \quad (3.5.1)$$

Cette majoration n'est intéressante que pour $p < 3$.

Concernant l'algorithme défini à la section 4, pour montrer qu'il converge, il est nécessaire de donner les nouvelles expressions de la dérivée de l'application $S_f^b(\cdot)$ défini maintenant par:

$$\begin{aligned} \varphi \mapsto \theta &= S_f^b(\varphi) \in H_b; \quad \text{où } \theta \text{ vérifie:} \\ \alpha(\theta, \psi) + \frac{1}{p} (\varphi^{p-1} \theta, \psi)_h &= (f, \psi)_h \quad \forall \psi \in V_h(0). \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Lemme 3.5.1. Soit $w \in H_b$ tel que $S_f^b(w) = w$ et soit Γ le voisinage de w dans H_b défini par:

$$\Gamma = \{\varphi \in H_b; \quad \|w - \varphi\|_{L^\infty(0,1)} < \frac{\bar{w}}{2}\}.$$

Alors $S_f^b(\varphi) \in C^1(\Gamma)$ et $DS_f^b(\varphi) \in \mathcal{L}(H_0; H_0)$ est défini par:

$$DS_f^b(\varphi).v = -(p-1)S(\varphi).\varphi^{p-2}vS_f^b(\varphi).$$

Démonstration. Nous procédons comme à la section 4, lemme 3.4.2. Nous définissons $\tilde{\theta}$ et θ , des fonctions de $V_h(b)$ par:

$$a(\theta, \psi) + \frac{1}{p}(\varphi^{p-1}\theta, \psi)_h = (f, \psi)_h; \quad (3.5.4)$$

$$a(\tilde{\theta}, \psi) + \frac{1}{p}((\varphi + v)^{p-1}\tilde{\theta}, \psi)_h = (f, \psi)_h \quad \forall \psi \in V_h(0), \quad (3.5.5)$$

où $v \in H_0$ est un accroissement de φ . On a donc:

$$\theta = S_f^b(\varphi); \quad \tilde{\theta} = S_f^b(\varphi + v).$$

La fonction φ est choisie dans $\Gamma = \{\varphi \in H_b; \quad \|w - \varphi\|_{L^\infty(0,1)} < \frac{\bar{w}}{2}\}$, et la fonction v est définie telle que $\|v\|_{L^\infty(0,1)}$ soit assez petite, ce qui entraîne l'existence et l'unicité des fonctions $\theta, \tilde{\theta}$ telles que $\theta > 0$; $\tilde{\theta} > 0$ pour $x > 0$. En soustrayant membre à membre les relations (3.5.4) et (3.5.5), il vient:

$$a(\tilde{\theta} - \theta, \psi) + \frac{1}{p}(\varphi^{p-1}(\tilde{\theta} - \theta), \psi)_h = -\frac{1}{p}(((\varphi + v)^{p-1} - \varphi^{p-1})\tilde{\theta}, \psi)_h. \quad (3.5.6)$$

Nous définissons l'application $y \rightarrow \Psi = S(\varphi).y$ par:

$$a(\Psi, w) + \frac{1}{p}(\varphi^{p-1}\Psi, w)_h = \frac{1}{p}(y, w)_h. \quad (3.5.7)$$

On a alors

$$\tilde{\theta} - \theta = -S(\varphi).((\varphi + v)^{p-1} - \varphi^{p-1})\tilde{\theta}, \quad (3.5.8)$$

ce qui peut encore s'écrire:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} - \theta &= -(p-1)S(\varphi).\varphi^{p-2}v\tilde{\theta} - (p-1)S(\varphi).\varphi^{p-2}(\tilde{\theta} - \theta) \\ &\quad - S(\varphi).((\varphi + v)^{p-1} - \varphi^{p-1} - (p-1)\varphi^{p-2}v)\tilde{\theta}. \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

D'autre part on a:

$$\begin{aligned} (\varphi + v)^{p-1} - \varphi^{p-1} &= (p-1)(\varphi + \eta v)^{p-2}v \quad \text{avec } 0 < \eta < 1 \\ &= O(\|v\|_{L^\infty(0,1)}). \end{aligned}$$

Nous déduisons alors de (3.5.6)

$$\|\tilde{\theta} - \theta\|_{H^1(0,1)} = O(\|v\|_{L^\infty(0,1)}) \quad \text{donc} \quad \|\tilde{\theta} - \theta\|_{L^\infty(0,1)} = O(\|v\|_{L^\infty(0,1)}).$$

Par ailleurs, nous pouvons écrire

$$(\varphi + v)^{p-1} - \varphi^{p-1} - (p-1)\varphi^{p-2}v = (p-1)v((\varphi + \eta v)^{p-2} - \varphi^{p-2}),$$

donc

$$\|(\varphi + v)^{p-1} - \varphi^{p-1} - (p-1)\varphi^{p-2}v\|_{L^\infty(0,1)} \leq C\|v\|_{L^\infty(0,1)}\epsilon(\|v\|_{L^\infty(0,1)}),$$

où $\epsilon(t)$ tend vers zéro avec t . Le lemme 3.5.1 est démontré.

□

En ce qui concerne le rayon spectral de $DS_f^b(w)$, nous avons:

Lemme 3.5.2. *Le rayon spectral de l'application $v \mapsto DS_f^b(w).v$ de H_0 dans H_0 satisfait l'inégalité*

$$\rho(DS_f^b(w)) \leq (p-1) \frac{\|w^{p-1}\|_{L^\infty(0,1)}}{p\mu + \|w^{p-1}\|_{L^\infty(0,1)}} \quad \text{où}$$

$$\mu = \inf_{z \in V_h(0); z \neq 0} \frac{a(z, z)}{(z, z)_h} > 0.$$

Démonstration. Etudions les valeurs propres λ et les fonctions propres r de l'opérateur linéaire en dimension finie $DS_f^b(w)$.

$$\begin{aligned} DS_f^b(w).r &= \lambda r, \quad \text{donc} \\ -(p-1)S(w).w^{p-2}r &= \lambda r, \quad \text{et en utilisant } w = S_f^b(w) \\ -(p-1)S(w).w^{p-1}r &= \lambda r, \quad \text{où encore} \\ a(-\lambda r, \psi) + \frac{1}{p}(w^{p-1}(-\lambda r), \psi)_h &= \frac{p-1}{p}(w^{p-1}r, \psi)_h \end{aligned}$$

On pose $-\lambda r = q$, il vient:

$$\begin{aligned} a(q, \psi) + \frac{1}{p}(w^{p-1}q, \psi)_h &= -\frac{p-1}{\lambda p}(w^{p-1}q, \psi)_h \\ a(q, \psi) + \frac{1}{p} \frac{\lambda p + p-1}{\lambda p}(w^{p-1}q, \psi)_h &= 0. \end{aligned}$$

Posons $d = -\frac{1}{p} \frac{\lambda p + p-1}{\lambda p}$, alors nous avons l'inégalité:

$$\begin{aligned} d &\geq \frac{\mu}{\|w^{p-1}\|_{L^\infty(0,1)}}, \quad \text{d'où} \\ |\lambda| &\leq (p-1) \frac{\|w^{p-1}\|_{L^\infty(0,1)}}{p\mu + \|w^{p-1}\|_{L^\infty(0,1)}}. \end{aligned}$$

Le lemme 3.5.2 est démontré.

□

Ainsi nous pouvons affirmer que:

Lemme 3.5.3. Pour $p > 2$, l'algorithme (3.4.2) converge dès que la condition

$$\mu \|w^{p-1}\|_{L^\infty(0,1)}^{-1} > 1 - \frac{2}{p} \quad (3.5.12)$$

est satisfaite.

Si on utilise l'algorithme 3.4.2 pour résoudre le problème approché donné par (3.3.1) avec $\gamma(s) = \frac{s^p}{p}$ pour un $n \geq 1$ fixé, dans ce qui précède, la fonction $w \in V_h(b)$ désigne la fonction U^n . Nous savons d'après le Lemme 3.3.2 que:

$$\|U^n\|_{L^\infty(0,1)} \leq \max(\|U^0\|_{L^\infty(0,1)}, b) \quad 1 \leq n \leq N.$$

La condition suffisante (3.5.12) devient alors:

$$\tau \mu (\max(\|U^0\|_{L^\infty(0,1)}, b))^{1-p} > 1 - \frac{2}{p}.$$

Remarque 3.5.2.

Pour généraliser le problème traité dans les sections 1 à 4, on peut considérer le cas où la dimension d'espace n , égale 2. Dans ce cas l'intervalle $(0, 1)$ est remplacé par un rectangle $\Omega = (0, 1) \times (0, 2)$ par exemple. Le terme u_{xx} dans le problème (P) est remplacé par Δu , le Laplacien de u .

Si on note $\vec{x} = (x_1, x_2)$, où $(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 2]$, on remplacera les conditions aux limites en $\{0\}$ et $\{1\}$ par:

$$u(\vec{x}, t) = \begin{cases} u_1(0, x_2, t) & \text{pour } x_2 \in [0, 2], t \in [0, T]; \\ u_1(x_1, 0, t) & \text{pour } x_1 \in [0, 1], t \in [0, T]; \\ u_1(1, x_2, t) & \text{pour } x_2 \in [0, 2], t \in [0, T]; \\ u_1(x_1, 2, t) & \text{pour } x_1 \in [0, 1], t \in [0, T], \end{cases}$$

avec $u_1(0, x_2, t) = 0$ pour $x_2 \in [0, 2], t \in [0, T]$. La condition initiale sera alors:

$$u(\vec{x}, 0) = u_0(\vec{x}).$$

Les hypothèses HP1, HP2 et HP3 seront remplacées par:

HP1 u_0 et u_1 sont respectivement de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ et sur $\overline{\Omega} \times [0, T]$.

HP2 $u_1(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2)$ pour $(x_1, x_2) \in \partial\Omega$.

HP3 u_0 et u_1 sont des fonctions non négatives, de plus $\exists \beta > 0$ tel que $u_0(\vec{x}) \geq \beta x_1$, pour $\vec{x} \in \overline{\Omega}$, et $u_1(x_1, x_2, t) \geq \beta x_1 \forall (x_1, x_2) \in \partial\Omega$ pour $0 \leq t \leq T$.

Dans une telle situation on obtient des résultats d'existence et d'unicité d'une solution faible (voir [19]) ainsi que l'estimation ii) du théorème 3.2.1.

Pour obtenir l'existence d'une solution approchée (lemme 3.2.1) et avoir des majorations de stabilité, il convient de demander au maillage de vérifier certaines propriétés garantissant le principe du maximum pour le Laplacien (par exemple avec des mailles triangulaires à trois noeuds, les angles des triangles sont $\leq \frac{\pi}{2}$).

Si on divise le domaine Ω en deux sous domaines: $\Omega_h = \{\bar{x} \in \Omega; 0 < x_1 < h\}$ et $\Omega_h^c = \{\bar{x} \in \Omega, \bar{x} \notin \Omega_h\}$, on peut adapter la démonstration de la majoration de l'erreur à ce cas.

Concernant l'algorithme défini à la section 3, les résultats des lemmes 3.4.1, 3.4.2 et 3.4.3 restent vrais. Il suffit en effet uniquement de substituer, dans la démonstration du lemme 3.4.2, l'utilisation de l'inclusion de $H^1(0, 1)$ dans $C^0([0, 1])$ par l'inégalité inverse du type:

$$\|\tilde{\theta} - \theta\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(h) \|\tilde{\theta} - \theta\|_{H^1(\Omega)},$$

et de remarquer que pour l'algorithme, h est "fixé". Il est à noter que dans ce cas, Γ_1 le voisinage de la solution w dépendra du paramètre h .

REFERENCES

1. Aronson D.G., *Regularity properties of flows through porous media: a contreexample*, SIAM J. Appl. Math. 19 (1970), 299-307.
2. Arison D.G., Benilan Ph., *Régularité des solutions de l'équation des milieux poreux dans \mathbb{R}^N* , Comptes Rendus à l'Académie des Sciences Paris t. 288 série A janvier (1979), 103-107.
3. Benilan Ph., *Opérateurs accréatifs et semi-groupes dans les espaces L^p* Func. Anal.-Num. Anal. Japan France seminar, Fuyita Ed, Tokyo-Kyoto (1976), 15-52.
4. Brezis H., *Analyse fonctionnelle théorie et applications.*, Masson, 1987.
5. Berryman, J.G. and Holland C.J., *Stability of the separable solution for fast diffusion*, Arch. Rational Mech. Anal. 74 (1980), 379-388.
6. Ciarlet Ph., *Introduction à l'analyse Numérique Matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris, 1982.
7. ———, *The finite element method for elliptic problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.
8. Descloux J., *On the equation of Boussinesq.*, Topics in numerical analysis III. Proceedings of the Royal Irish Academy, conference on numerical analysis, Edited by J.J.H. Miller (1977), Academic Press.
9. Drake J.R., Greenwood J.R., Navratil G.A., and Post R.S., *Diffusion coefficient scaling in the Wisconsin levitated octupole*, The Physics of Fluids 20 (1977), 148-154.
10. Friedman A., *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice Hall, London, 1960.
11. Herrero M.A., Pierre M., *The Cauchy problem for $u_t = \Delta u^m$ when $0 < m < 1$* , Trans. of the Am. Math. Society 291 (1985), 147-158.
12. Ladyženskaya, Solonnikov, Uralceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, vol. 23, Trans. of Math. monographs, Rhode Island, 1968.
13. Lesaint P., Pousin J., *Error estimates for a nonlinear degenerate parabolic problem*, Math. of Comp. 59 (1992), 339-358.
14. Le Roux, M.N., *Semi discretization in time of a fast diffusion equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 137 (1989), 354-370.
15. Nochetto R., *Error estimates for two phases Stefan problems in several spaces variables, 1 linear boundary conditions*, Calcolo 22 (1985), 457-499.
16. Oleinik O.A., *The Prandtl system of equations in boundary layer theory*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR Soviet Math. 159 (1963), 583-586.
17. ———, *Sur quelques équations paraboliques dégénérantes de la mécanique*, Colloque International sur les Equations aux Dérivées Partielles (1962), C.N.R.S., Paris.

18. Oleinik O.A., Kalashnikov A. S., Crou Jui-lin', *The Cauchy problem and boundary-value problems for equations of unsteady filtration type*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Math. **22** (1958).
19. Peletier L.A., *Porous medium equations*, Nonlinear Analysis in Physical Sciences (1981), Amman Ed Pitman, London, 381-411.
20. Protter M.H., Weinberger H.F., *Maximum Principle in differential equations*, Springer-Verlag, 1984.
21. Sabinina E.S., *A class of nonlinear degenerating parabolic equations*, Soviet Mathematics **43** (1962), 495-498.
22. Schwartz L., *Cours d'analyse*, Hermann, 1967.
23. Tartar L., *Topics in nonlinear analysis*, Publication Mathématiques d'Orsay 78.13 (1978).

Annexe 1

Dans cette annexe on montre que si f est une fonction à valeurs dans \mathbf{R}_+ définie sur un intervalle fermé de \mathbf{R} , $I_a \stackrel{\text{def}}{=} [0, a]$, où $a > 0$, alors on peut approcher la fonction f par une suite de fonctions régulières. On peut énoncer le résultat suivant:

Lemme. Soit $a > 0$, $f \in C^1((0, a); \mathbf{R}_+)$ et soit $\infty > M \geq 1$ tel que $\sup_{x \in (0, a)} |f'(x)| \leq M$. On définit $q_0 \in \mathbf{N}$, $q_0 > 2$ tel que $a > \frac{2}{q_0}$. Alors il existe une suite de fonctions $\{f_p\}_{p > q_0}$ telles que $f_p \in C^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{R}_+^*)$ et qui vérifient les propriétés suivantes:

- (i) $\frac{M+1}{p} \leq f_p(x) \leq \max_{y \in [0, a]} |f(y)| + M + 1$ pour tout $p \geq q_0$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$;
- (ii) $f_p \searrow f$ lorsque p tend vers l'infini uniformément sur I_a ;
- (iii) pour tout $p \geq q_0$ il existe deux voisinages V_0 et V_a des points $\{0\}$ et $\{a\}$ tels que $f_p(x) = f(\frac{1}{p}) + \frac{M+1}{p}$, $\forall x \in V_0$ et $f_p(x) = f(1 - \frac{1}{p}) + \frac{M+1}{p}$, $\forall x \in V_1$;
- (iiii) $\max_{x \in \mathbf{R}} |f'_p(x)| \leq M$, $\forall p \geq q_0$.

Démonstration. Tout d'abord remarquons que si $f \in C^1((0, a); \mathbf{R}_+)$, alors le théorème des accroissements finis implique que: $f \in C^0(I_a; \mathbf{R}_+)$. Nous étendons le domaine de définition de f à tout \mathbf{R} en posant: $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(0)$ pour $x \leq 0$ et $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(a)$ pour $x \geq a$. Nous notons toujours par f la fonction ainsi obtenue. Evidemment $f \in C^0(\mathbf{R}; \mathbf{R}_+)$ mais $f \notin C^1(\mathbf{R}; \mathbf{R}_+)$. Pour $p \geq q_0$ on définit l'intervalle I_p^a par $I_p^a \stackrel{\text{def}}{=} [\frac{1}{p}, a - \frac{1}{p}]$ et la fonction \overline{f}_p par:

$$\overline{f}_p(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(\frac{1}{p}) + \frac{M+1}{p} & \text{si } x \leq \frac{1}{p}; \\ f(x) + \frac{M+1}{p} & \text{si } x \in I_p^a; \\ f(a - \frac{1}{p}) + \frac{M+1}{p} & \text{si } x \geq a - \frac{1}{p}. \end{cases}$$

Calculons la différence $\overline{f}_{p+1} - \overline{f}_p$ pour $p \geq q_0$.

$$\overline{f}_{p+1}(x) - \overline{f}_p(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{p+1}) - f(\frac{1}{p}) - \frac{M+1}{p(p+1)} & \text{si } x \leq \frac{1}{p+1}; \\ f(x) - f(\frac{1}{p}) - \frac{M+1}{p(p+1)} & \text{si } \frac{1}{p+1} \leq x \leq \frac{1}{p}; \\ -\frac{M+1}{p(p+1)} & \text{si } x \in I_p^a; \\ f(x) - f(a - \frac{1}{p}) - \frac{M+1}{p(p+1)} & \text{si } a - \frac{1}{p} \leq x \leq a - \frac{1}{p+1}; \\ f(a - \frac{1}{p+1}) - f(a - \frac{1}{p}) - \frac{M+1}{p(p+1)} & \text{si } a - \frac{1}{p+1} \leq x. \end{cases}$$

Le théorème des accroissements finis et la propriété $\sup_{x \in (0, a)} |f'(x)| \leq M$ permettent de déduire la majoration suivante:

$$\overline{f}_{p+1}(x) - \overline{f}_p(x) \leq \begin{cases} -\frac{M+1}{p(p+1)} & \text{si } x \in I_p^a; \\ -\frac{1}{p(p+1)} & \text{si } x \notin I_p^a. \end{cases}$$

On montre alors facilement que la suite $\{\overline{f_p}\}_{p \geq q_0}$ vérifie les propriétés suivantes:

$$\frac{M+1}{p} \leq \overline{f_p} \leq \max_{x \in I_a} f(x) + \frac{M+1}{q_0} \quad \forall p \geq q_0; \quad (P1)$$

$$\overline{f_p} \text{ est constante pour } x \notin I_a^p \quad \forall p \geq q_0; \quad (P2)$$

$$\{\overline{f_p}\} \text{ est décroissante; } \frac{1}{p(p+1)} \leq \overline{f_p}(x) - \overline{f_{p+1}}(x) \leq \frac{2M+1}{p(p+1)} \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad \forall p \geq q_0; \quad (P3)$$

$$\overline{f_p}(x) - \overline{f_p}(y) = f(x) - f(y) \quad \forall x, y \in \mathbf{R}, \quad \forall p \geq q_0. \quad (P4)$$

Calculons la différence entre $\overline{f_p}$ et f .

$$\overline{f_p}(x) - f(x) = \begin{cases} \frac{M+1}{p} & \text{si } x \in I_a^p; \\ f(\frac{1}{p}) - f(x) + \frac{M+1}{p} & \text{si } x \leq \frac{1}{p}; \\ f(a - \frac{1}{p}) - f(x) + \frac{M+1}{p} & \text{si } a - \frac{1}{p} \leq x. \end{cases}$$

Le théorème des accroissements finis permet d'obtenir l'estimation suivante:

$$\frac{1}{p} \leq \overline{f_p}(x) - f(x) \leq \frac{2M+1}{p} \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad \forall p \geq q_0. \quad (P5)$$

Soit $\delta > 0$, on désigne par ρ_δ un noyau régularisant tel que $\text{supp} \rho_\delta \subset B(0, \delta)$ et tel que $\int_{B(0, \delta)} \rho_\delta(x) dx = 1$ (voir par exemple Brézis [4] p. 70 pour avoir une expression de ρ_δ).

On pose $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \delta(p) = \frac{1}{4Mp(p+1)}$ et on définit les fonctions f_p par:

$$f_p(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{R}} \rho_\delta(x-y) \overline{f_p}(y) dy = \int_{B(0, \delta)} \rho_\delta(z) \overline{f_p}(x-z) dz \quad \text{pour tout } p \geq q_0.$$

On vérifie immédiatement que la propriété (P1) entraîne que:

$$\frac{M+1}{p} \leq f_p \leq \max_{x \in I_a} f(x) + \frac{M+1}{q_0} \quad \forall p \geq q_0,$$

ainsi l'item i) est prouvée.

Montrons l'item ii) du lemme. Pour cela on calcule $f_p - f_{p+1}$ que l'on écrit sous la forme:

$$f_p(x) - f_{p+1}(x) = f_p(x) - \overline{f_p}(x) + \overline{f_p}(x) - \overline{f_{p+1}}(x) + \overline{f_{p+1}}(x) - f_{p+1}(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Estimons la différence $|f_p(x) - \overline{f_p}(x)|$.

$$\begin{aligned} |f_p(x) - \overline{f_p}(x)| &= \left| \int_{\mathbf{R}} \rho_\delta(x-y) \overline{f_p}(y) dy - \overline{f_p}(x) \right| \\ &\leq \int_{|x-y| \leq \delta} \rho_\delta(x-y) |\overline{f_p}(y) - \overline{f_p}(x)| dy. \end{aligned}$$

La propriété (P4) et le théorème des accroissements finis (que l'on utilise pour estimer $|f(y) - f(x)|$) induisent l'estimation:

$$|f_p(x) - \overline{f}_p(x)| \leq \int_{|x-y| \leq \delta} \rho_\delta(x-y) |f(y) - f(x)| dy \leq \int_{|x-y| \leq \delta} \rho_\delta(x-y) M \delta dy.$$

On obtient finalement (puisque $\int_{\mathbf{R}} \rho_\delta(x) dx = 1$)

$$|f_p(x) - \overline{f}_p(x)| \leq \frac{M}{4Mp(p+1)} \leq \frac{1}{4p(p+1)} \quad \forall x \in \mathbf{R}; \quad \forall p \geq q_0. \quad (2)$$

Les propriétés (P3) et (2) permettent alors de montrer que la suite $\{f_p\}$ est une suite décroissante $\forall p \geq q_0$ puisque l'on a:

$$f_p(x) - f_{p+1}(x) \geq \frac{1}{p(p+1)} - \frac{2}{4p(p+1)} \geq \frac{1}{2p(p+1)}.$$

Majorons maintenant $|f_p(x) - f(x)|$. On a:

$$|f_p(x) - f(x)| \leq |f_p(x) - \overline{f}_p(x)| + |\overline{f}_p(x) - f(x)|, \quad \forall x \in \mathbf{R}; \quad \forall p \geq q_0,$$

qui se transforme grâce à l'estimation (2) et à la propriété (P5) en:

$$|f_p(x) - f(x)| \leq \frac{1}{4p(p+1)} + \frac{2M+1}{p} \quad \forall x \in \mathbf{R}; \quad \forall p \geq q_0.$$

Nous avons donc prouvé l'item ii).

L'item iii) est une conséquence immédiate de la définition de $\delta = \delta(p)$. On peut choisir des voisinages centrés des points $\{0\}$ et $\{a\}$ et de longueur $\eta(p) = \frac{2}{p(p+1)}$ par exemple.

Pour finir montrons l'item iii). Soit h fixé, calculons $f_p(x+h) - f_p(x)$; d'après la propriété (P4) on a:

$$f_p(x+h) - f_p(x) = \int_{\mathbf{R}} \rho_\delta(x-z) [f(z+h) - f(z)] dz.$$

Ainsi

$$|f_p(x+h) - f_p(x)| \leq \int_{\mathbf{R}} \rho_\delta(x-z) |f(z+h) - f(z)| dz,$$

que l'on majore en utilisant le théorème des accroissements finis pour la fonction f , ce qui conduit à:

$$|f_p(x+h) - f_p(x)| \leq |h|M \int_{\mathbf{R}} \rho_\delta(x-z) dz = |h|M \quad \forall x \in \mathbf{R}; \quad \forall p \geq q_0.$$

On a donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f_p(x+h) - f_p(x)|}{|h|} \leq M \quad \forall x \in \mathbf{R}; \quad \forall p \geq q_0,$$

ce qui prouve l'item iii). Le lemme A.2.1 est démontré.

□

Annexe 2

Rappelons la famille de problèmes perturbés (P^ϵ) que nous considérons à la section 2. Pour $p > 2$ fixé soit u_p définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbf{R}_+ donnée, et pour $\epsilon = \frac{1}{p}$

soit $u^\epsilon \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$ qui vérifie:

$$u_t^\epsilon = \Phi_\epsilon(u^\epsilon)u_{xx}^\epsilon \quad \text{dans } Q_T; \quad (\text{A.2.1})$$

$$u^\epsilon(x, 0) = u_p(x), \quad \text{dans } (0, 1); \quad (\text{A.2.2})$$

$$u^\epsilon(0, t) = u_p(0), \quad u^\epsilon(1, t) = u_p(1) \quad \text{dans } (0, T), \quad (\text{A.2.3})$$

où $\Phi_\epsilon \in C^2(\mathbf{R}; \mathbf{R}_+)$ est telle que: $\sup_{x \in \mathbf{R}} |\Phi_\epsilon^{(l)}| < \infty$ pour $l = 0, 1, 2$ et telle que: $\Phi_\epsilon(s) > 0 \forall s \in \mathbf{R}$. La fonction Φ_ϵ est une régularisation de la fonction $\frac{1}{x}$ (voir démonstration du lemme 3.2.4). Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant:

Lemme A.2.1. *Supposons que la fonction u_p est de classe C^∞ , qu'il existe $\infty > M > 0$ tel que $\sup_{s \in [0, 1]} |u_p'(s)| \leq M \forall p > 2$, et qu'il existe deux voisinages des points $\{0\}$ et $\{1\}$, \mathcal{V}_0 et \mathcal{V}_1 tels que u_p est constante dans \mathcal{V}_0 et \mathcal{V}_1 . Si u^ϵ est une solution du problème (P^ϵ) , c'est-à-dire des équations (A.2.1), (A.2.2) et (A.2.3), alors il existe une constante C indépendante de ϵ pour $\epsilon \in (0, 1)$ telle que:*

$$\|u_x^\epsilon\|_{C^0(\overline{Q_T})} \leq C(\|u_0\|_{C^1(0, 1)}). \quad (\text{A.2.4})$$

Démonstration. Principe de la démonstration: premièrement on montre que l'on peut estimer $u_x^\epsilon(0)$ et $u_x^\epsilon(1)$. Ensuite en dérivant par rapport à x les équations (A.2.1) et (A.2.2), le principe du maximum appliqué à l'équation que vérifie u_x^ϵ nous permettra d'obtenir l'inégalité (A.2.4).

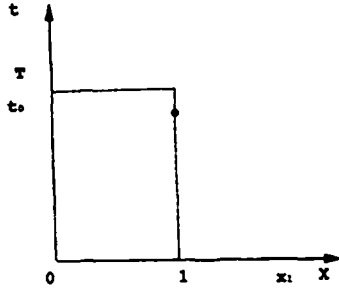
On translate le problème (P^ϵ) afin d'avoir des conditions aux limites homogènes. On pose $v(x) \stackrel{\text{déf}}{=} (1-x)u_p(0) + xu_p(1)$ pour $0 \leq x \leq 1$ et on définit la fonction u par: $u(x, t) = u^\epsilon(x, t) - v(x)$ pour $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$. Un calcul élémentaire montre que u est solution de:

$$u_t - \Phi_\epsilon(u^\epsilon)u_{xx} = 0 \quad \text{dans } Q_T; \quad (\text{A.2.5})$$

$$u(x, 0) = u_p(x) - v(x), \quad \text{dans } (0, 1); \quad (\text{A.2.6})$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \text{dans } (0, T). \quad (\text{A.2.7})$$

Pour tout $t_0 \geq 0$, montrons que l'on peut construire des fonctions "barrières" aux points $\{0, t_0\}$ et $\{1, t_0\}$. Considérons la partie $x = 1$ du bord de Q_T .



On pose $w(x) \stackrel{\text{def}}{=} \exp[-\mu(1-x_1)^2] - \exp[-\mu(x-x_1)^2] \geq 0$ pour $x \in [0, 1]$. On choisit x_1 et μ tels que:

$$w''(x) = 2[1 - 2\mu(x-x_1)^2]\mu \exp[-\mu(x-x_1)^2] \leq -m < 0 \quad \forall x \in [0, 1],$$

c'est-à-dire que l'on prend $\mu = 1$ et $x_1 = 2$, et on aura $m = 2\exp(-4)$. Un calcul simple montre que:

$$w_t - \Phi_\epsilon(u^\epsilon)w_{xx} = -\Phi_\epsilon(u^\epsilon)w_{xx} \geq \gamma m > 0 \quad \text{dans } Q_T,$$

où γ est la borne inférieure (positive) de $\Phi_\epsilon(u^\epsilon)$.

Soit $C_1 = \frac{M}{\exp(-4)}$ où M est défini par les hypothèses du lemme A.2.1. Si on pose $\psi \stackrel{\text{def}}{=} C_1 w - u$, puisque $\sup_{x \in [0, 1]} |u'_p(x) - v'(x)| \leq M$ où M est indépendant de p , il est alors aisé de vérifier en utilisant le théorème des accroissements finis que $\psi(x, 0) = C_1 w(x) - u_p(x) + v(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Il est alors immédiat de contrôler que ψ vérifie:

$$\begin{aligned} \psi_t - \Phi_\epsilon(u^\epsilon)\psi_{xx} &> 0 && \text{dans } Q_T; \\ \psi(x, 0) &\geq 0, && \text{dans } [0, 1]; \\ \psi(0, t) &> 0 \text{ et } \psi(1, t) > 0 && \text{dans } [0, T]. \end{aligned}$$

Le principe du maximum (cf théorème 2 p. 168 [20]) permet d'affirmer que $\psi \geq 0$ dans $\overline{Q_T}$, ce qui s'écrit:

$$u(x, t) \leq C_1 w(x) \quad \forall (x, t) \in \overline{Q_T}. \quad (\text{A.2.8})$$

En appliquant le raisonnement précédent à la fonction $\psi \stackrel{\text{def}}{=} C_1 w + u$ on en déduit que:

$$u(x, t) \geq -C_1 w(x) \quad \forall (x, t) \in \overline{Q_T}. \quad (\text{A.2.9})$$

Remarquant que $u(1, t_0) = w(1) = 0$, on a d'après les estimations (A.2.8) et (A.2.9):

$$-C_1[w(x) - w(1)] \leq u(x, t_0) - u(1, t_0) \leq C_1[w(x) - w(1)] \quad \forall (x, t) \in \overline{Q_T},$$

soit encore

$$|u(x, t_0) - u(1, t_0)| \leq C_1|w(x) - w(1)| \quad \forall (x, t) \in \overline{Q_T}. \quad (\text{A.2.10})$$

Les fonctions u et w sont C^1 , on déduit donc de l'estimation (A.2.10)

$$|u_x(1, t_0)| \leq C_1 |w'(1)|. \quad (\text{A.2.11})$$

Le choix de x_1 , de μ , de γ et de m étant indépendant de t_0 , l'estimation (A.2.11) a lieu pour tout $t_0 \in [0, T]$, c'est-à-dire:

$$|u_x(1, t)| \leq C_1 |w'(1)|, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (\text{A.2.12})$$

On peut donc écrire pour la fonction u^ϵ

$$|u_x^\epsilon(1, t) - (u_p(1) - u_p(0))| \leq C_1 |w'(1)|, \quad \forall t \in [0, T];$$

ce qui avec les hypothèses du lemme A.2.1 et le théorème des accroissements finis fournit:

$$\begin{aligned} |u_x^\epsilon(1, t)| &\leq C_1 |w'(1)| + |u_p(1) - u_p(0)| \\ &\leq C_1 |w'(1)| + M \stackrel{\text{def}}{=} C_2. \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (\text{A.2.13})$$

Raisonnant de la même manière pour la partie $x = 0$ du bord de Q_T , on obtient:

$$|u_x^\epsilon(0, t)| \leq C_3, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (\text{A.2.14})$$

Les constantes C_2 et C_3 ne dépendent pas de ϵ .

Posons maintenant $v^\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} u_x^\epsilon$, et dérivons par rapport à x l'équation (A.2.5). La fonction v^ϵ vérifie les équations suivantes:

$$v_t^\epsilon - \Phi_\epsilon(u^\epsilon) v_{xx}^\epsilon - \Phi_\epsilon'(u^\epsilon) v^\epsilon = 0 \quad \text{dans } Q_T; \quad (\text{A.2.15})$$

$$v^\epsilon(x, 0) = u_p'(x) \quad \text{dans } (0, 1); \quad (\text{A.2.16})$$

$$v^\epsilon(0, t) = u_x^\epsilon(0, t); \quad v^\epsilon(1, t) = u_x^\epsilon(1, t) \quad \text{dans } (0, T). \quad (\text{A.2.17})$$

Les coefficients de l'équation (A.2.15) sont des fonctions Hôldériennes puisque la fonction $u_x^\epsilon \in C^0(\overline{Q_T})$ et la fonction Φ_ϵ est régulière et la fonction $\Phi_\epsilon(u^\epsilon)$ est minorée par une constante positive. La théorie des opérateurs uniformément paraboliques à coefficients Hôldériens implique que $v^\epsilon \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\overline{Q_T})$ (voir par exemple le corollaire 1 p. 71 de Friedman [10]).

D'après les hypothèses du lemme A.2.1 u_p' est nulle dans les voisinages V_0 et V_1 des points $x = 0$ et $x = 1$. On peut alors affirmer que $\max_{x \in [0,1]} u_p'(x) \geq 0$ et que $\max_{x \in [0,1]} -u_p'(x) \geq 0$. Ainsi d'après le théorème 7 et la remarque ii) p. 174-175 de [20] on sait que l'équation (A.2.15) vérifie le principe du maximum, c'est-à-dire que v^ϵ atteint son maximum sur la partie $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{0\} \times [0, T] \cup \{1\} \times [0, T] \cup [0, 1] \times \{0\}$ du bord de Q_T .

De même, en posant $w^\epsilon = -v^\epsilon$, il est immédiat de voir que w^ϵ satisfait:

$$w_t^\epsilon - \Phi_\epsilon(u^\epsilon) w_{xx}^\epsilon - \Phi_\epsilon'(u^\epsilon) w^\epsilon = 0 \quad \text{dans } Q_T;$$

$$w^\epsilon(x, 0) = -u_p'(x) \quad \text{dans } (0, 1);$$

$$w^\epsilon(0, t) = -u_x^\epsilon(0, t); \quad w^\epsilon(1, t) = -u_x^\epsilon(1, t) \quad \text{dans } (0, T).$$

Le principe du maximum implique que la fonction w^ϵ atteint son maximum sur la partie $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{0\} \times [0, T) \cup \{1\} \times [0, T) \cup [0, 1] \times \{0\}$ du bord de Q_T . Ainsi la fonction v^ϵ atteint son minimum sur la partie Γ du bord de Q_T .

Les conditions aux limites et initiales étant bornées en norme C^0 indépendamment de ϵ (voir (A.2.13) et (A.2.14)), on en déduit que

$$\sup_{(x,t) \in \overline{Q_T}} |u_x^\epsilon| \leq C$$

où la constante C est indépendante de ϵ . Le lemme A.2.1 est démontré.

□

CHAPITRE 4

Résultat d'existence et d'approximation pour un problème de couche limite thermique

Résumé. Nous considérons dans ce chapitre un problème de couche limite thermique pour un écoulement de fluide chimiquement réactif. La température, inconnue du problème, vérifie une équation parabolique non linéaire qui dégénère le long d'un côté du domaine. Pour résoudre ce problème, nous utilisons une méthode d'approximation. Nous définissons une discrétisation du problème par différences finies, puis en faisant tendre les paramètres de la discrétisation vers zéro, nous montrons l'existence d'une solution faible. L'unicité est démontrée grâce à un argument de transposition-dualité. Le schéma aux différences sera utilisé dans le chapitre 6 pour résoudre numériquement un problème d'écoulement d'air sur un plan ou autour d'un corps, ce qui permettra de mettre en évidence l'influence des réactions chimiques qui se produisent.

Mentionnons que ce travail a été réalisé en collaboration avec P. Lesaint de l'université de Besançon (voir Lesaint-Pousin [15]).

4.1. Introduction.

Lorsqu'un corps se déplace dans l'air à une vitesse supersonique, il est bien connu (cf Anderson [1]) qu'une couche limite visqueuse et une couche limite thermique apparaissent près de la surface du corps. Le but de ce travail est d'étudier une approximation des équations de la couche limite thermique, dans le cas d'un corps bidimensionnel, en prenant en compte les réactions chimiques se produisant dans l'air. Nous supposons que les vitesses des réactions chimiques entre les espèces constituant l'air sont beaucoup plus grandes que la vitesse du fluide. C'est ce que l'on appelle l'hypothèse de chimie à l'équilibre.

Les équations de la couche limite visqueuse laminaire ont déjà fait l'objet de nombreux travaux. Dans le cas d'un fluide incompressible, l'existence et l'unicité de la solution des équations de la couche limite en géométrie bi- ou tridimensionnelle ont été étudiées théoriquement par Oleinik [16], [17] et Walter [20]. Pour une approximation numérique du problème tridimensionnel, nous renvoyons au travail de Caussignac-Touzani [6], [7].

Dans le cas d'un fluide compressible, on pourra consulter pour l'approximation numérique les travaux de Aupoix-Cousteix [2], Boillat-Pousin [4] ou Edelm [12] lorsque les réactions chimiques sont considérées.

Nous supposons que la vitesse $\vec{V} = (u, v)^T$ et la densité ρ du fluide sont données et que la vitesse s'annule sur le corps. Avant de donner l'équation que la température T satisfait dans la couche limite thermique rappelons quelques notations introduites dans les chapitres précédents.

Nous notons par $\vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_5)^T$ le vecteur dont les composantes représentent les fractions massiques des espèces chimiques N, O, N_2, O_2, NO constituant l'air (voir (1.1.1)). La pression est notée P , l'enthalpie massique de l'air est notée $h(T, P)$ (cf (1.2.5)) et h_k représente l'enthalpie massique de l'espèce k (cf 1.2.3)). La deuxième composante de la vitesses de diffusion de l'espèce k est notée v_{k_2} (cf (1.1.4)) et finalement, λ et μ désignent respectivement la conductivité thermique (cf (1.3.3)) et la viscosité de l'air (cf (1.3.6)).

La température T dans la couche limite thermique satisfait l'équation non linéaire parabolique (1.4.17) du chapitre 1 qui s'écrit:

$$\rho \vec{V}^T \nabla h(T, \vec{Y}) - \partial_y (\lambda \partial_y T) = u \partial_x P - \partial_y \left(\sum_{k=1}^N \rho Y_k h_k(T) v_{k_2} \right) + \mu (\partial_y u)^2.$$

L'hypothèse de l'équilibre chimique (voir section 3 du chapitre 2 pour une définition) impose de négliger les vitesses de diffusion v_{k_2} . Pour une telle situation le vecteur \vec{Y} , dans l'équation précédente représente les fractions massiques des espèces à l'équilibre chimique (voir section 3 chapitre 2 pour une définition précise). Remarquons que dans ce cas le vecteur \vec{Y} devient une fonction connue de la température et de la pression via les lois d'action de masse (voir chapitre 6 section 1 pour une expression détaillée dans le cas de l'air). Si en outre, le corps est une plaque plane, alors la pression est constante dans

la couche limite, ainsi l'enthalpie massique h devient une fonction H de la température uniquement.

Afin de simplifier l'exposé, dans ce chapitre nous considérerons le cas d'une plaque plane où la conductivité thermique λ est constante et égale à un.

Nous désignons par u , respectivement par v les produits de la densité par la vitesse tangentielle, respectivement par la vitesse normale. Si $\infty > X > 0$ et $\infty > Y > 0$ sont donnés et représentent respectivement la longueur de la plaque, et la hauteur sous laquelle la couche limite apparaît, nous dénotons par Q le rectangle $(0, X) \times (0, Y)$ et nous définissons le problème (P) par: trouver T telle que

$$\begin{aligned} u\partial_x H(T) + v\partial_y H(T) - \partial_{yy}^2 T &= f && \text{dans } Q; \\ T(0, y) &= T_0(y) && \text{dans } (0, Y); \\ T(x, 0) &= T_w && \text{dans } (0, X); \\ T(x, Y) &= T_e && \text{dans } (0, X). \end{aligned}$$

Les fonctions u , v , et f définies sur \overline{Q} , les fonctions T_w , T_e définies sur $[0, Y]$, la fonction T_0 définie sur $[0, X]$ et la fonction $s \mapsto H(s)$ définie sur \mathbb{R} sont données. Les expressions $H(\cdot)$ et f représentent respectivement l'enthalpie par unité de masse et l'énergie due aux forces de friction.

L'équation dégénère sur la partie du bord correspondant au corps puisque la vitesse s'annule sur le corps, c'est-à-dire $u = v = 0$ si $y = 0$.

Dans ce chapitre, le résultat que nous obtiendrons pour le problème (P) peut s'énoncer ainsi: sous certaines hypothèses, précisées à la fin de cette section, nous montrons l'existence d'une unique solution généralisée. Cette solution sera obtenue par un procédé constructif au moyen d'un schéma numérique.

Le chapitre quatre est organisé de la façon suivante.

A la section 2, nous définissons la notion de solution généralisée ou faible pour le problème (P), et l'unicité d'une telle solution est prouvée grâce à un argument de transposition-dualité.

A la section 3, nous définissons un schéma aux différences finies pour approcher le problème (P). Ce schéma est implicite pour la discrétisation en la variable x , considérée comme une variable de temps. La discrétisation du terme convectif $v\partial_y H(T)$ est décentrée. L'existence d'une solution approchée, ainsi que des estimations a priori pour cette solution sont établies.

A la section 4, faisant tendre les paramètres de la discrétisation vers zéro, nous montrons la convergence de la solution approchée vers une solution généralisée du problème (P).

Finalement à l'annexe 1, nous donnons une démonstration de l'existence de solutions généralisées pour un problème annexe qui est parabolique linéaire à coefficients dans $L^\infty(Q)$ et qui est dégénéré. Ce résultat d'existence a été utilisé dans la démonstration de l'unicité des solutions faibles du problème (P).

La fin de cette section est consacrée aux hypothèses que les données du problème (P) satisfont.

Dans la suite du chapitre nous supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites:

HP1 La fonction $s \mapsto H(s)$ de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est de classe C^1 et il existe deux constantes

$M > 0$ et $\gamma > 0$ telles que $\gamma \leq C_p(s) \leq M$, pour tous $s \in \mathbb{R}$, où $C_p(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dH}{ds}(s)$;

HP2

" i)" u et v appartiennent à $W^{1,\infty}(Q)$;

" ii)" $\partial_x u + \partial_y v = 0$ dans Q ;

" iii)" $u(x, 0) = 0$, $u(x, y) > 0$ pour tout $(x, y) \in Q$ et il existe une constante $\mu > 0$ telle que $\sup_{(x,y) \in Q} \text{ess} \frac{|v(x,y)|}{u(x,y)} \leq \mu$;

HP3 T_0 appartient à $H^1(0, Y)$ et vérifie $T_0(y) > 0$ pour tout y ;

HP4 la fonction f définie sur \bar{Q} est de classe C^1 et $f > 0$;

HP5 T_w et T_e sont des constantes positives.

Remarque 4.1.1

L'hypothèse HP2 implique que le problème (P) est uniformément parabolique à l'intérieur de Q , propriété qui permettra de montrer l'unicité des solutions généralisées (voir section 2).

Remarque 4.1.2

L'hypothèse HP1 concernant la fonction enthalpie est réaliste en pratique (voir la propriété P_r chapitre 6).

Remarque 4.1.3

L'hypothèse HP2 i) est compatible avec les résultats obtenus par Oleinik [16] (théorème 3 page 22) pour un problème de couche limite incompressible. L'hypothèse HP2 ii) simplifie quelque peu les démonstrations mais est non essentielle. L'hypothèse HP2 iii) est essentielle et la régularité en x demandée à f à l'hypothèse HP4 nous semble minimale pour obtenir les majorations a priori de la section 3.

L'hypothèse HP5 est introduite par souci de simplicité. En fait on peut supposer que T_w et T_e sont des fonctions positives appartenant à $H^1(0, X)$.

4.2. Définition d'une solution faible du problème (P) et unicité.

Avant d'énoncer la définition d'une solution faible pour le problème (P), nous rappelons la définition des espaces fonctionnels dont nous aurons besoin, et nous donnons un résultat concernant les traces sur des parties du bord de l'ouvert Q de fonctions définies dans Q mais qui ne sont pas continues dans \bar{Q} . Ce résultat nous sera utile pour donner un sens aux conditions aux limites des solutions faibles du problème (P).

Soit B un espace de Banach dont la norme est notée $\|\cdot\|_B$, on désigne par $L^2(0, Y; B)$ l'espace des (classes) de fonctions $y \mapsto \psi(y)$ de $(0, Y)$ à valeurs dans B telles que ψ est mesurable au sens de Bochner pour dy et telle que

$$\|\psi\|_{L^2(0, Y; B)} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\int_0^Y \|\psi(y)\|_B^2 dy} < \infty.$$

L'espace $L^2(0, Y; B)$ est complet (voir Dau-Lio [10]).

Dans le cas où B désigne l'espace $L^2(0, X)$, on identifie $L^2(0, Y; L^2(0, X))$ à $L^2(Q)$.

Si pour $\psi \in L^2(0, Y; L^2(0, X))$ on note $\frac{d}{dy}\psi \in \mathcal{D}'(0, Y; L^2(0, X))$ la dérivée de la fonction ψ au sens des distributions (cf [10]), on définit l'espace de Banach E par:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \psi \in L^2(0, Y; L^2(0, X)) \text{ telles que } \frac{d}{dy}\psi \in L^2(0, Y; L^2(0, X)) \right\},$$

où la norme de E est donnée par

$$\|\psi\|_E = \|\psi\|_{L^2(0, Y; L^2(0, X))} + \left\| \frac{d}{dy}\psi \right\|_{L^2(0, Y; L^2(0, X))} \quad \forall \psi \in E.$$

Si $\mathcal{D}([0, Y]; L^2(0, X))$ désigne l'espace des restrictions à $[0, Y]$ des fonctions définies sur \mathbb{R} à valeurs dans $L^2(0, X)$, de classe C^∞ et à support compact, alors d'après [10] (lemme 1 p.571 avec $V = L^2(0, X)$, $V' = L^2(0, X)$) on peut affirmer que:

Lemme 4.2.1. *L'espace $\mathcal{D}([0, Y]; L^2(0, X))$ est inclu dans E et l'injection est dense.*

Nous pouvons alors établir le résultat de trace suivant:

Lemme 4.2.2. *Il existe deux applications linéaires continues γ_0^ψ et γ_Y^ψ de E dans $L^2(0, X)$ définies par:*

$$\begin{aligned} \gamma_0^\psi : E &\rightarrow L^2(0, X) & \gamma_Y^\psi : E &\rightarrow L^2(0, X) \\ \psi &\mapsto \psi(0) & \psi &\mapsto \psi(Y). \end{aligned}$$

Démonstration. On raisonne par densité. On montre que γ_0^ψ est bien définie sur l'espace $\mathcal{D}([0, Y]; L^2(0, X))$ et est continue pour la norme de E . Ainsi, puisque $\mathcal{D}([0, Y]; L^2(0, X))$

est dense dans E (voir lemme 4.2.1) on pourra prolonger γ_0^y par continuité à E tout entier. Montrons qu'il existe une constante C , qui dépend de Y , telle que:

$$\|\gamma_0^y \psi\|_{L^2(0,X)} \leq C \|\psi\|_E \quad \forall \psi \in \mathcal{D}([0,Y]; L^2(0,X)).$$

Soit a une fonction définie sur $[0,Y]$ à valeurs dans \mathbf{R} de classe C^1 sur $[0,Y]$ telle que $a(0) = 1$, et $a(Y) = 0$.

Soit $\psi \in \mathcal{D}([0,Y]; L^2(0,X))$, on pose $v = a\psi$ et on a:

$$\psi(0) = - \int_0^Y \frac{d}{dy} v \, dy.$$

L'inégalité de Hölder et l'inégalité $2bc \leq b^2 + c^2$ entraînent:

$$\|\psi(0)\|_{L^2(0,X)}^2 \leq 2 \left[\|a'\|_{L^2(0,Y)}^2 + \|a\|_{L^2(0,Y)}^2 \right] \left[\|\psi\|_{L^2(0,Y;L^2(0,X))}^2 + \|\psi\|_{L^2(0,Y;L^2(0,X))}^2 \right].$$

On pose

$$C = \sqrt{2 \left[\|a'\|_{L^2(0,Y)}^2 + \|a\|_{L^2(0,Y)}^2 \right]}.$$

On utilise les mêmes arguments pour γ_Y^y . Le lemme 4.2.2 est démontré.

□

Remarque 4.2.1

Si on définit l'espace de Banach E_1 par:

$$E_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \psi \in L^2(0,X; L^2(0,Y)) \text{ telles que } \frac{d}{dx} \psi \in L^2(0,X; L^2(0,Y)) \right\},$$

où la norme de E_1 est donnée par

$$\|\psi\|_{E_1} = \|\psi\|_{L^2(0,X;L^2(0,Y))} + \left\| \frac{d}{dx} \psi \right\|_{L^2(0,X;L^2(0,Y))} \quad \forall \psi \in E_1,$$

on peut intervertir le rôle des variables x et y dans ce qui précède, et établir à l'aide des mêmes arguments le résultat suivant:

Il existe deux applications linéaires continues γ_0^x et γ_X^x de E_1 dans $L^2(0,Y)$ définies par:

$$\begin{aligned} \gamma_0^x : E_1 &\rightarrow L^2(0,Y) & \gamma_X^x : E_1 &\rightarrow L^2(0,Y) \\ \psi &\mapsto \psi(0) & \psi &\mapsto \psi(X). \end{aligned}$$

Finalement on peut énoncer le résultat suivant:

Lemme 4.2.3. Si $H^1(Q)$ désigne l'ensemble suivant:

$$H^1(Q) = \left\{ \psi \in L^2(Q) \text{ telles que } \partial_x \psi \in L^2(Q), \partial_y \psi \in L^2(Q) \right\},$$

alors il existe une application linéaire continue γ_0^\sharp de $H^1(Q)$ dans $L^2(0, Y)$ définie par:

$$\begin{aligned} \gamma_0^\sharp : H^1(Q) &\rightarrow L^2(0, Y) \\ \psi &\mapsto \psi(0, \cdot). \end{aligned}$$

Démonstration. On identifie $L^2(Q)$ à $L^2(0, X; L^2(0, Y))$, ainsi $H^1(Q) \hookrightarrow E_1$ avec injection continue. L'existence de γ_0^\sharp est alors fournie par la remarque 4.2.1. Le lemme 4.2.3 est démontré.

□

Maintenant nous pouvons donner la définition d'une solution faible pour le problème (P).

Définition 4.2.1. On dit que $T \in L^2(0, X; H^1(0, Y))$ telle que $u\partial_x T \in L^2(Q)$ est une solution faible du problème (P) si:

$$\int_Q \{u\partial_x H(T) + v\partial_y H(T)\} \varphi \, dx dy + \int_Q \partial_y T \partial_y \varphi \, dx dy = \int_Q f \varphi \, dx dy$$

pour tout $\varphi \in L^2(0, X; H_0^1(0, Y))$; (4.2.1)

et si:

$$\{uT\}(0, y) = u(0, y)T_0(y) \quad \text{pour } y \in (0, Y); \quad (4.2.2)$$

$$T(x, 0) = T_w; \quad T(x, Y) = T_e \quad \text{pour } x \in (0, X). \quad (4.2.3)$$

D'après l'hypothèse HP2 i) nous avons $(uT) \in H^1(Q)$ et ainsi le lemme 4.2.3 implique que la condition (4.2.2) est bien définie dans $L^2(0, Y)$. Les conditions (4.2.3) sont elles bien définies dans $L^2(0, X)$ d'après le lemme 4.2.2 puisque $T \in E$.

Si $\mathcal{D}(Q)$ désigne l'ensemble des fonctions $C^\infty(Q)$ à support compact dans Q , en utilisant l'hypothèse HP2 i) et la propriété $\mathcal{D}(Q) \hookrightarrow L^2(0, X; H_0^1(0, Y))$, on remarquera qu'au sens des distributions nous avons:

$$u\partial_x H(T) + v\partial_y H(T) - \partial_{yy}^2 T = f \text{ dans } \mathcal{D}'(Q), \quad (4.2.4)$$

ce qui avec l'hypothèse HP1 implique en particulier que $\partial_{yy}^2 T \in L^2(Q)$.

Nous donnons maintenant le résultat principal de cette section à savoir l'unicité des solutions faibles.

Théorème 4.2.1. *Supposons les hypothèses HP1 et HP2 satisfaites, alors le problème (P) a au plus une solution faible.*

Avant de démontrer le théorème 4.2.1, nous donnons un résultat d'existence pour un problème parabolique annexe qui nous sera utile dans la démonstration de l'unicité. La démonstration de ce résultat est reportée à l'annexe 1 à la fin de ce chapitre.

Pour α, β et F des fonctions définies dans Q , on s'intéresse au problème suivant:

trouver ϕ vérifiant

$$\begin{aligned} \alpha \partial_x \phi + \beta \partial_y \phi - \partial_{yy}^2 \phi &= \alpha F \text{ dans } Q; \\ \phi(x, 0) = \phi(x, Y) &= 0 \quad \text{dans } (0, X); \\ \phi(0, y) &= 0 \quad \text{pour } d \leq y \leq Y \text{ et pour tout } d > 0. \end{aligned}$$

Pour ce problème on a:

Lemme 4.2.4. *Soit α, β des fonctions appartenant à $L^\infty(Q)$ et soit F une fonction appartenant à $L^2(Q)$ données. Si on suppose*

- i) *qu'il existe une fonction non négative $\theta \in C^0(\overline{Q})$ telle que $\theta(x, y) > 0$ pour tout $y > 0$ et tout $x \in [0, X]$, et satisfaisant $\alpha(x, y) \geq \theta(x, y)$ presque partout dans Q ;*
- ii) *qu'il existe une constante $\mu_1 > 0$ telle que $\sup_{(x,y) \in Q} \text{ess} \frac{|\beta(x,y)|}{\alpha(x,y)} \leq \mu_1$.*

Alors il existe une fonction $\phi \in L^2(0, X; H_0^1(0, Y))$, telle que $\alpha \partial_x \phi \in L^2(Q)$ et vérifiant les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \int_Q \{ \alpha \partial_x \phi + \beta \partial_y \phi \} w \, dx dy + \int_Q \partial_y \phi \partial_y w \, dx dy &= \int_Q \alpha F w \, dx dy \\ &\text{pour tout } w \in L^2(0, X; H_0^1(0, Y)); \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

$$\phi(0, y) = 0 \text{ dans } L^2(d, Y), \quad \text{pour tout } d > 0. \quad (4.2.6)$$

De plus $\phi \in L^2(0, X; H^2(0, Y))$.

Pour tout d tel que $0 < d < Y$ nous définissons le domaine Q_d par: $Q_d \stackrel{\text{def}}{=} (0, X) \times (d, Y)$. Si nous changeons x en $X - x$, le lemme 4.2.4 implique le résultat suivant:

Lemme 4.2.5. *Soit α, β des fonctions appartenant à $L^\infty(Q)$ et soit F une fonction appartenant à $L^2(Q)$ données. Si on suppose*

- i) *qu'il existe une fonction non négative $\theta \in C^0(\overline{Q})$ telle que $\theta(x, y) > 0$ pour tout $y > 0$ et tout $x \in [0, X]$, et satisfaisant $\alpha(x, y) \geq \theta(x, y)$ presque partout dans Q ;*
- ii) *qu'il existe une constante $\mu_1 > 0$ telle que $\sup_{(x,y) \in Q} \text{ess} \frac{|\beta(x,y)|}{\alpha(x,y)} \leq \mu_1$.*

Alors il existe une fonction $\Phi \in L^2(0, X; H_0^1(0, Y))$, telle que $\alpha \partial_x \Phi \in L^2(Q)$, $\partial_x \Phi \in L^2(Q_d)$ pour tout $d > 0$ et vérifiant:

$$-\alpha \partial_x \Phi + \beta \partial_y \Phi - \partial_{yy}^2 \Phi = \alpha F \text{ dans } L^2(Q); \quad (4.2.7)$$

$$\Phi(X, y) = 0 \quad \text{dans } L^2(d, Y), \text{ pour tout } d > 0. \quad (4.2.8)$$

Maintenant nous sommes en mesure de démontrer le théorème 4.2.1.

Démonstration du théorème 4.2.1. Principe de la démonstration. on suppose qu'il existe deux solutions. On considère la formulation (4.2.1) du problème (P) avec une fonction "test" obtenue à l'aide du problème auxiliaire (4.2.7), (4.2.8) et on conclut.

Supposons qu'il existe deux solutions faibles T_1 et T_2 . Nous posons alors:

$$\Gamma_1 \stackrel{\text{def}}{=} H(T_1); \quad \Gamma_2 \stackrel{\text{def}}{=} H(T_2); \quad \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_1 - \Gamma_2; \quad \text{et } K \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{\Gamma}{T_1 - T_2} & \text{si } T_1 \neq T_2 \\ H'(T_1) & \text{si } T_1 = T_2 \end{cases}.$$

Il est immédiat grâce à l'hypothèse HP1 d'obtenir les estimations suivantes pour la fonction K :

$$0 < \gamma \leq K(x, y) \leq M \text{ pour } (x, y) \text{ dans } Q.$$

Définissons maintenant α par $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} uK$; β par $\beta \stackrel{\text{def}}{=} -vK$, et F par $F \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Gamma}{K} = T_1 - T_2$. Le lemme 4.2.5 induit l'existence d'une fonction $\Phi \in L^2(0, X; H_0^1(0, Y))$, telle que $u \partial_x \Phi \in L^2(Q)$, $\partial_x \Phi \in L^2(Q_d)$ pour tout $d > 0$ et satisfaisant:

$$-uK \partial_x \Phi - vK \partial_y \Phi - \partial_{yy}^2 \Phi = u\Gamma \text{ dans } L^2(Q); \quad (4.2.9)$$

$$\Phi(X, y) = 0 \quad \text{dans } L^2(d, Y), \text{ pour tout } d > 0. \quad (4.2.10)$$

Multiplions l'équation (4.2.9) par la différence $T_1 - T_2$ et intégrons sur le domaine Q , il vient:

$$\int_Q \left[-uK \partial_x \Phi - vK \partial_y \Phi - \partial_{yy}^2 \Phi \right] (T_1 - T_2) dx dy = \int_Q u\Gamma (T_1 - T_2) dx dy,$$

qui s'écrit encore:

$$\int_Q -u\Gamma \partial_x \Phi - v\Gamma \partial_y \Phi - \partial_{yy}^2 \Phi (T_1 - T_2) dx dy = \int_Q u \frac{\Gamma^2}{K} dx dy. \quad (4.2.11)$$

Puisque les fonctions Γ et Φ appartiennent à $L^2(0, X; H_0^1(0, Y))$, nous pourrions donc appliquer la première formule de Green (cf [10]) si nous montrons le lemme suivant:

Lemme 4.2.6. Si $\Gamma \in L^2(Q)$ est telle que $u\Gamma \in H^1(Q)$ et si $\Phi \in L^2(Q)$ est telle que $u\partial_x \Phi \in L^2(Q)$ et vérifient au sens de la trace dans $L^2(0, Y)$:

$$u(0, y)\Gamma(0, y) = u(X, y)\Phi(X, y) = 0.$$

Alors l'égalité suivante est vraie:

$$-\int_Q u\Gamma\partial_x \Phi \, dx dy = \int_Q (\Phi u\partial_x \Gamma + \Gamma\Phi\partial_x u) \, dx dy. \quad (4.2.12)$$

Démonstration. Principe de la démonstration. Pour tout $n > 0$ on introduit une fonction de troncature définie sur $[0, Y]$, nulle dans $[0, \frac{Y}{n}]$, et on prouve (4.2.12) lorsque Φ est remplacée par son produit avec la fonction de troncature. La dérivation ne portant que sur la variable x on peut passer à la limite lorsque n tend vers l'infini et prouver (4.2.21).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit θ_n une fonction de troncature appartenant à $C^1([0, Y])$ telle que:

$$\theta_n(y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq \frac{Y}{n}, \\ 0 \leq \theta_n(y) \leq 1 & \text{si } \frac{Y}{2n} \leq y \leq \frac{Y}{n}, \\ 0 & \text{si } y \leq \frac{Y}{2n}. \end{cases}$$

On définit la fonction Φ_n par:

$$\Phi_n(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_n(y)\Phi(x, y) \forall (x, y) \in Q.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction Φ_n appartient à E_1 .

Sachant que $u\Gamma \in H^1(Q)$ et que $u(0, y)\Gamma(0, y) = u(X, y)\Phi_n(X, y) = 0$ dans $L^2(0, Y)$, nous avons en intégrant par parties:

$$-\int_Q u\Gamma\partial_x \Phi_n \, dx dy = \int_Q \Phi_n u\partial_x \Gamma + \Gamma\Phi_n\partial_x u \, dx dy. \quad (4.2.13)$$

La fonction θ_n ne dépend pas de x , on a:

$$(u\partial_x \Phi_n)(x, y) = u(x, y)\theta_n(y)\partial_x \Phi(x, y) = \theta_n(y)u(x, y)\partial_x \Phi(x, y) \forall (x, y) \in Q.$$

Les fonctions $u\partial_x \Phi_n$ et Φ_n convergent respectivement vers $u\partial_x \Phi$ et vers Φ presque partout dans Q , les fonctions $u\partial_x \Phi$ et Φ appartiennent à $L^2(Q)$, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue implique que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u\partial_x \Phi_n = u\partial_x \Phi \text{ dans } L^2(Q) \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = \Phi \text{ dans } L^2(Q).$$

Nous pouvons donc passer à la limite lorsque n tend vers l'infini dans l'égalité (4.2.13), et nous obtenons l'égalité (4.2.12) que nous voulions établir. Le lemme 4.2.6 est démontré.

□

Nous intégrons par parties dans le membre de droite de l'expression (4.2.11). En utilisant l'hypothèse HP2 ii) et la nullité des termes de bord: $\{T_1 - T_2\}(x, 0)$ et $\{T_1 - T_2\}(x, Y)$, il vient:

$$\int_Q \{u \partial_x \Gamma + v \partial_y \Gamma\} \Phi + \partial_y (T_1 - T_2) \partial_y \Phi \, dx dy = \int_Q u \frac{\Gamma^2}{K} \, dx dy.$$

Les fonctions T_1 et T_2 sont deux solutions faibles du problème (P), ainsi le membre de gauche de l'identité précédente est nul, ce qui nous permet de déduire que:

$$\int_{Q_d} u \frac{\Gamma^2}{K} \, dx dy = 0 \text{ pour tout } d > 0.$$

D'après la minoration de K et l'hypothèse HP2 iii), il s'ensuit que $\Gamma = 0$ presque partout dans Q . Le théorème 4.2.1 est démontré.

□

4.3. Existence, unicité et estimations a priori pour la solution discrète.

Le problème (P) est approché en utilisant un schéma aux différences implicite dans la direction des x et un schéma centré dans la direction y à l'exception des termes de convection qui sont décentrés afin d'obtenir un schéma de type positif. Les termes non linéaires sont évalués avec leurs valeurs à la position précédente. Nous construisons ainsi une méthode de marche.

Soit N et m deux entiers donnés. On pose $\tau = \frac{X}{N}$, et pour $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ on définit les points x_i par $x_i = i\tau$. L'intervalle $[0, X]$ est ainsi divisé en N sous-intervalles I_n , avec $I_n = (x_{n-1}, x_n)$ pour $1 \leq n \leq N$.

On pose $h = \frac{Y}{m+1}$ et pour $j \in \{0, 1, \dots, m+1\}$ on définit les points y_j par: $y_j = jh$. L'intervalle $[0, Y]$ est ainsi divisé en $m+1$ sous-intervalles J_j , avec $J_j = [y_j, y_{j+1}]$ pour $0 \leq j \leq m$.

Introduisons maintenant quelques notations. Pour ce faire, dans les quelques lignes qui suivent, les indices j et n peuvent parcourir respectivement les ensembles $\{0, \dots, m+1\}$ et $\{1, \dots, N\}$. Nous noterons par $(u_j^n)^+$, $(u_j^n)^-$ les parties positives respectivement négatives de u au point (x_n, y_j) c'est-à-dire,

$$(u_j^n)^+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|u_j^n(x_n, y_j)| + u_j^n(x_n, y_j)}{2}; (u_j^n)^- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|u_j^n(x_n, y_j)| - u_j^n(x_n, y_j)}{2}.$$

De la même manière, nous noterons la partie positive, respectivement négative de v au point (x_n, y_j) par:

$$(v_j^n)^+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|v_j^n(x_n, y_j)| + v_j^n(x_n, y_j)}{2}; (v_j^n)^- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|v_j^n(x_n, y_j)| - v_j^n(x_n, y_j)}{2}.$$

La grandeur T_j^0 désignera la valeur de la condition "initiale" au point y_j , $T_j^0 \stackrel{\text{def}}{=} T_0(y_j)$ et nous noterons F_j^n l'intégrale suivante:

$$F_j^n \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x, y_j) dx.$$

Le problème discret que nous appellerons aussi problème (4.3.1) ou schéma (4.3.1) auquel nous allons nous intéresser dans ce chapitre est défini comme suit:
soit $\{T_j^0\}_{j=0}^{m+1}$ donné par:

$$T_j^0 = T_0(y_j) \text{ pour } 0 \leq j \leq m+1,$$

supposons connue une approximation $\{T_j^n\}_{j=0}^{m+1}$ de la solution $T(x_n, y_j)$ pour $0 \leq j \leq m+1$, alors nous cherchons $\{T_j^{n+1}\}_{j=0}^{m+1}$ pour $0 \leq n \leq N-1$ comme la solution de:

$$\begin{aligned} C_p(T_j^n) [u_j^{n+1} \{T_j^{n+1} - T_j^n\} + (v_j^{n+1})^+ \frac{\tau}{h} (T_j^{n+1} - T_{j-1}^{n+1}) - (v_j^{n+1})^- \frac{\tau}{h} (T_{j+1}^{n+1} - T_j^{n+1})] - \\ \frac{\tau}{h^2} \{T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}\} = F_j^{n+1}, \text{ pour } 1 \leq j \leq m; \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

$$T_0^{n+1} = T_w; \quad T_{m+1}^{n+1} = T_e.$$

Concernant l'existence et l'unicité de solution du problème discret nous avons le résultat suivant:

Lemme 4.3.1. Supposons les hypothèses HP1 à HP5 satisfaites. Alors le problème (4.3.1) a une solution unique $\{T_j^{n+1}\}_{j=0}^{m+1}$ pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$. De plus, les T_j^{n+1} sont positifs pour $j \in \{0, \dots, m+1\}$, et pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$.

Démonstration. Le lemme 4.3.2 est une conséquence classique des propriétés des matrices monotones à diagonale strictement dominante.

Soit A la matrice tridiagonale définie par:

$$A_{ij} = \begin{cases} -\frac{\tau}{h} \left[\frac{1}{h} + C_p(T_j^n)(v_j^{n+1})^- \right] & \text{si } j = i+1; \\ C_p(T_j^n)u_j^{n+1} + \frac{\tau}{h} \left[\frac{2}{h} + |v_j^{n+1}| \right] & \text{si } j = i; \\ -\frac{\tau}{h} \left[\frac{1}{h} + C_p(T_j^n)(v_j^{n+1})^+ \right] & \text{si } j = i-1; \\ 0 & \text{si } j \notin \{i-1, i, i+1\}; \end{cases} \quad \text{pour } 1 < i < m+1;$$

$$A_{1j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}; \quad A_{m+2j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = m+2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Si on dénote par $\tilde{T}^n \in \mathbb{R}^{m+2}$ le vecteur de composantes $(T_0^n, \dots, T_{m+1}^n)$ et par $\tilde{F}^n \in \mathbb{R}^{m+2}$ le vecteur de composantes $(T_w, F_1^n + C_p(T_1^n)T_1^n, \dots, F_m^n + C_p(T_m^n)T_m^n, T_e)$, le problème (4.3.1) s'écrit:

$$A\tilde{T}^{n+1} = \tilde{F}^{n+1}.$$

Dans ce qui suit, on dira qu'un vecteur de \mathbb{R}^{m+2} est positif, respectivement non négatif si toutes ses composantes sont positives, respectivement non négatives.

D'après l'hypothèse HP2 iii) nous savons que $u(x_{n+1}, y_j) > 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, m+1\}$.

L'hypothèse HP1 elle implique que $C_p > 0$, il est alors immédiat de vérifier que la matrice A est à diagonale strictement dominante et donc non singulière (cf Berman-Plemmons [3]).

Le système linéaire précédent possède donc un unique vecteur solution $\tilde{T}^{n+1} \in \mathbb{R}^{m+2}$.

Les éléments diagonaux de la matrice A sont positifs, les éléments hors diagonaux sont non positifs, la matrice est donc monotone (cf [3]). L'hypothèse HP5 fournit la positivité de T_e et de T_w , l'hypothèse HP4 entraîne que F_j^{n+1} est positif pour $j \in \{1, \dots, m\}$. Ainsi si \tilde{T}^n est un vecteur non négatif alors d'après l'hypothèse HP1 \tilde{F}^{n+1} est un vecteur positif, et on en déduit (cf [3]) que le vecteur \tilde{T}^{n+1} solution de $A\tilde{T}^{n+1} = \tilde{F}^{n+1}$ est positif.

L'hypothèse HP3 implique que \tilde{T}^0 est un vecteur positif, l'hypothèse de récurrence: pour tout n , tel que $0 < n \leq N-1$ si \tilde{T}^n est un vecteur positif alors le vecteur \tilde{T}^{n+1} solution de $A\tilde{T}^{n+1} = \tilde{F}^{n+1}$ est positif, étant vérifiée on en déduit que le vecteur \tilde{T}^{n+1} solution de $A\tilde{T}^{n+1} = \tilde{F}^{n+1}$ est positif pour tout n , $0 < n \leq N-1$. Le lemme 4.3.1 est démontré.

□

Les estimations a priori de stabilité pour le problème discret (4.3.1) sont très techniques. Pour plus de clarté, nous montrons comment ce type d'estimations de stabilité peuvent être obtenues lorsque l'on considère un problème continu ayant les mêmes propriétés que

le problème discret (4.3.1). Soit donc le problème (4.3.2) qui est défini par : trouver T vérifiant les équations suivantes :

$$\begin{aligned} uC_p(T)\partial_x T + vC_p(T)\partial_y T - \partial_{yy}^2 T - \frac{\tau}{2}\partial_{yyx}^3 T &= F && \text{dans } Q; \\ T(x, 0) = T_w; \quad T(x, Y) = T_e &\text{dans } (0, X); \quad T(0, y) = T_0(y) && \text{dans } (0, Y). \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Le lien entre le problème (4.3.2) et le schéma (4.3.1) n'est pas difficile à établir. Un calcul simple montre que si on approche les fonctions u et v par leurs valeurs au point (x_{n+1}, y_j) , $C_p(T)$ par sa valeur au point (x_n, y_j) et que l'on approche F par sa moyenne sur I_{n+1} au point y_j . Alors en remplaçant $\partial_y T$ par une différence finie décentrée autour du point (x_{n+1}, y_j) et en remplaçant $\partial_x T$, $\partial_{yy}^2 T$ et $\partial_{yyx}^3 T$ par des différences finies centrées autour du point $(\frac{1}{2}\{x_n + x_{n+1}\}, y_j)$ pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ et pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ on obtient le schéma (4.3.1) que nous avons considéré.

Maintenant nous nous intéressons au problème (4.3.2), et nous souhaitons obtenir des estimations a priori de stabilité en norme L^2 pour les dérivées $\partial_x T$, $\partial_{yy}^2 T$ et $\partial_{yyx}^3 T$ d'une solution T du problème (4.3.2). Avant d'énoncer un tel résultat, pour tout $L \in (0, X]$ fixé nous définissons le domaine Q_L par :

$$Q_L \stackrel{\text{def}}{=} (0, L) \times (0, Y).$$

Lemme 4.3.2. *Supposons que les hypothèses HP1 à HP5 sont satisfaites, et supposons que F est de classe C^1 . Si la fonction T définie sur \bar{Q} est de classe C^3 et est une solution du problème (4.3.2), alors pour tout $L \in (0, X]$ fixé les majorations suivantes sont vérifiées :*

$$\int_0^Y (\partial_y T(L, y))^2 dy \leq B_1; \quad (4.3.3)$$

$$\int_{Q_L} uC_p(T)(\partial_x T)^2 dx dy \leq B_1; \quad (4.3.4)$$

$$\tau \int_{Q_L} (\partial_{xy}^2 T)^2 dx dy \leq B_1, \quad (4.3.5)$$

où la constante B_1 dépend des données $(T_w, T_e, T_0$ et $F)$ mais est indépendante de τ et de L .

Démonstration. Principe de la démonstration. La présence du terme "dissipatif" $\partial_{yy}^2 T$ dans l'équation (4.3.2) permet d'utiliser le lemme de Gronwall pour contrôler la norme $L^2(0, Y)$ de la fonction $\partial_y T$. Pour cela nous devons d'abord estimer cette quantité, c'est ce que nous faisons dans ce qui suit.

Pour tout $L \in (0, X]$ fixé, on pose

$$\begin{aligned} B_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{Q_L} u C_p(T) (\partial_x T)^2 dx dy; \\ B_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{Q_L} v C_p(T) \partial_y T \partial_x T dx dy; \\ B_3 &\stackrel{\text{def}}{=} - \int_{Q_L} \partial_{yy}^2 T \partial_x T dx dy; \\ B_4 &\stackrel{\text{def}}{=} - \frac{\tau}{2} \int_{Q_L} \partial_{yyx}^3 T \partial_x T dx dy; \\ B_5 &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{Q_L} F \partial_x T dx dy. \end{aligned}$$

Nous multiplions l'équation (4.3.2) par $\partial_x T$ et nous intégrons sur Q_L , il vient:

$$\begin{aligned} \int_{Q_L} u C_p(T) (\partial_x T)^2 dx dy + \int_{Q_L} v C_p(T) \partial_y T \partial_x T dx dy - \int_{Q_L} \partial_{yy}^2 T \partial_x T dx dy - \\ \frac{\tau}{2} \int_{Q_L} \partial_{yyx}^3 T \partial_x T dx dy = \int_{Q_L} F \partial_x T dx dy, \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire:

$$B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = B_5.$$

Intéressons nous à la quantité B_2 . Nous pouvons estimer sa valeur absolue par:

$$|B_2| \leq \int_{Q_L} \sqrt{\frac{|v|}{u}} \sqrt{C_p(T)} \sqrt{u} |\partial_x T| \sqrt{|v|} \sqrt{C_p(T)} |\partial_y T| dx dy.$$

Les hypothèses HP1 et HP2 permettent de majorer les quantités $C_p(T)$ et $|v|$ par:

$$C_p(T) \leq M; \quad \frac{|v|}{u} \leq \mu; \quad \text{et } |v| \leq M_1 \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(x,y) \in Q} |v(x,y)|.$$

Nous en déduisons donc en utilisant l'inégalité de Young:

$$ab \leq \frac{\epsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\epsilon} b^2 \quad \forall \epsilon > 0, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}$$

que l'on a:

$$|B_2| \leq \sqrt{\mu} \left(\frac{\epsilon}{2} \int_{Q_L} u C_p(T) (\partial_x T)^2 dx dy + \frac{M_1 M}{2\epsilon} \int_{Q_L} (\partial_y T)^2 dx dy \right).$$

Estimons maintenant la quantité B_3 . Pour ce faire nous intégrons par parties en y , et remarquant que $\partial_x T$ s'annule en $y = 0$ et en $y = Y$, nous obtenons:

$$B_3 = \int_{Q_L} \partial_{yz}^2 T \partial_y T \, dx dy = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^Y (\partial_y T(L, y))^2 \, dy - \int_0^Y (\partial_y T(0, y))^2 \, dy \right\}.$$

Pour le terme B_4 , nous effectuons la même intégration par parties ce qui conduit à:

$$B_4 = \frac{\tau}{2} \int_{Q_L} (\partial_{xy}^2 T)^2 \, dx dy.$$

Le traitement du terme B_5 est un petit peu plus complexe. Ce terme contient la quantité $\partial_x T$ qui ne peut pas être contrôlée directement par le terme

$$B_1 = \int_{Q_L} u C_p(T) (\partial_x T)^2 \, dx dy,$$

puisque u s'annule sur la ligne $y = 0$. Pour pallier cette difficulté nous intégrons donc par parties en x dans le terme B_5 . Il vient:

$$B_5 = - \int_{Q_L} T \partial_x F \, dx dy + \int_0^Y (FT)(L, y) \, dy - \int_0^Y (FT)(0, y) \, dy.$$

Pour tout $x \in (0, L)$ et pour tout $y \in (0, Y)$, nous pouvons écrire:

$$T(x, y) = T(x, y) - \bar{T}(x, y) + \bar{T}(x, y), \text{ où } \bar{T}(x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} T_w,$$

ce qui permet de réexprimer B_5 sous la forme:

$$B_5 = - \int_{Q_L} (T - \bar{T}) \partial_x F \, dx dy - \int_{Q_L} \bar{T} \partial_x F \, dx dy + \int_0^Y F(L, y) (T - \bar{T})(L, y) \, dy + \\ \int_0^Y F(L, y) \bar{T}(L, y) \, dy - \int_0^Y F(0, y) T_0(y) \, dy.$$

Nous majorons les premier et troisième termes de B_5 à l'aide de l'inégalité de Poincaré qui s'écrit:

$$\int_0^Y (T - \bar{T})^2(x, y) \, dy \leq \frac{Y^2}{2} \int_0^Y (\partial_y \{T - \bar{T}\})^2(x, y) \, dy = \frac{Y^2}{2} \int_0^Y (\partial_y T)^2(x, y) \, dy, \forall x \in [0, X].$$

En utilisant les inégalités de Hölder et de Cauchy-Schwarz autant de fois que nécessaire, nous obtenons:

$$|B_5| \leq \frac{Y^2}{4} \int_{Q_L} (\partial_y T)^2 \, dx dy + \frac{1}{2} \int_{Q_L} (\partial_x F)^2 \, dx dy + \frac{\epsilon_1}{2} \int_0^Y (\partial_y T(L, y))^2 \, dy + \\ \frac{Y^2}{4\epsilon_1} \int_0^Y (F(L, y))^2 \, dy + \frac{1}{2} \int_{Q_L} (\partial_x F)^2 \, dx dy + \frac{1}{2} LY(T_w)^2 + \\ \frac{1}{2} \left\{ \int_0^Y (F(L, y))^2 \, dy + Y(T_w)^2 + \int_0^Y (F(0, y))^2 \, dy + \int_0^Y (T_0(y))^2 \, dy \right\}.$$

En combinant les majorations des expressions B_i pour $i = 1, \dots, 4$ que nous venons d'établir, l'inégalité:

$$B_1 - |B_2| + B_3 + B_4 \leq \sum_{i=1}^4 B_i \leq |B_5|$$

devient:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\epsilon\sqrt{\mu}}{2}\right) \int_{Q_L} u C_p(T) (\partial_x T)^2 dx dy + \frac{\tau}{2} \int_{Q_L} (\partial_{yx}^2 T)^2 dx dy + \frac{1 - \epsilon_1}{2} \int_0^Y (\partial_y T(L, y))^2 dy \leq \\ & \left\{ \frac{\sqrt{\mu} M M_1}{2\epsilon} + \frac{Y^2}{4} \right\} \int_{Q_L} (\partial_y T)^2 dx dy + \frac{Y}{2} (1 + L) (T_w)^2 + \frac{1}{2} \int_0^Y (T_0(y))^2 dy + \\ & \frac{1}{2} \int_0^Y (\partial_y T_0(y))^2 dy + \int_{Q_L} (\partial_x F)^2 dx dy + \left(\frac{1}{2} + \frac{Y^2}{4\epsilon_1}\right) \int_0^Y (F(L, y))^2 dy + \\ & \frac{1}{2} \int_0^Y (F(0, y))^2 dy. \end{aligned}$$

En choisissant $\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\mu}}$, et $\epsilon_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}$, nous obtenons l'estimation suivante en multipliant par 2 l'inégalité précédente:

$$\begin{aligned} & \int_{Q_L} u C_p(T) (\partial_x T)^2 dx dy + \tau \int_{Q_L} (\partial_{yx}^2 T)^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_0^Y (\partial_y T(L, y))^2 dy \\ & \leq c \int_{Q_L} (\partial_y T)^2 dx dy + C(F, T_0, T_w, Y), \quad (4.3.7) \end{aligned}$$

où $c \stackrel{\text{def}}{=} \mu M M_1 + \frac{Y^2}{2}$ et où $C(\cdot)$ est une quantité bornée uniformément par rapport à τ et L .

Considérant l'inégalité (4.3.7) où nous minorons les deux premiers termes du membre de gauche par zéro, nous obtenons:

$$\frac{1}{2} \int_0^Y (\partial_y T(L, y))^2 dy \leq c \int_0^L \int_0^Y (\partial_y T)^2 dx dy + C(F, T_0, T_w, Y).$$

Le lemme de Gronwall (voir lemme 1 p. 672 vol 3 [10]) s'applique à la fonction ϕ définie sur $(0, X)$ par:

$$L \mapsto \frac{1}{2} \int_0^Y (\partial_y T(L, y))^2 dy,$$

et nous obtenons

$$\phi(L) \leq \int_0^L \phi(s) ds + C(F, T_0, T_w, Y) \leq C(F, T_0, T_w, Y) \exp(cX).$$

On pose

$$B_1 = C(F, T_0, T_w, Y) \exp(cX)$$

et on a démontré l'estimation (4.3.3).

L'estimation ci-dessus permet de majorer le second membre de l'inégalité (4.3.7) par B_1 . Il est alors immédiat d'en déduire (4.3.4) et (4.3.5). Le Lemme 4.3.2 est démontré.

□

En utilisant la même démarche que précédemment nous établissons maintenant des inégalités de stabilité analogues aux inégalités (4.3.3), (4.3.4), (4.3.5) pour des approximations de $\partial_x T$, $\partial_{yy}^2 T$ et $\partial_{yyx}^3 T$ obtenues avec le schéma (4.3.1).

Lemme 4.3.3. *Supposons que les hypothèses HP1 à HP5 sont satisfaites. Pour tout n tel que $0 < n \leq N$ soit $\{T_j^n\}_{j=0}^{m+1}$ les valeurs de la solution approchée à l'abscisse x_n solutions du problème (4.3.1). Alors les majorations suivantes sont satisfaites:*

$$h \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^r - T_j^r}{h} \right)^2 \leq \tilde{B}_1; \quad (4.3.8)$$

$$\tau h \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=1}^m u_j^{n+1} C_p(T_j^{n+1}) \left(\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\tau} \right)^2 \leq \tilde{B}_1; \quad (4.3.9)$$

$$h \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^{n+1} - T_j^{n+1}}{h} - \frac{T_{j+1}^n - T_j^n}{h} \right)^2 \leq \tilde{B}_1, \quad (4.3.10)$$

où r est un nombre quelconque $0 < r \leq N$ et où \tilde{B}_1 est une constante indépendante de h , de τ et de r .

Démonstration. Comme à la démonstration du lemme 4.3.2 nous souhaitons utiliser le lemme de Gronwall pour contrôler la quantité:

$$h \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^r - T_j^r}{h} \right)^2.$$

Pour cela nous multiplions l'équation (4.3.1) par un analogue discret de $\partial_x T$, et nous sommes sur les indices n . Auparavant introduisons quelques notations. Nous définissons Z_j^{n+1} par:

$$Z_j^{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} (T_j^{n+1} - T_j^n),$$

et pour tout r tel que $0 < r \leq N$ nous posons:

$$\begin{aligned}
 A_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{h}{\tau} \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=1}^m u_j^{n+1} C_p(T_j^n) (Z_j^{n+1})^2; \\
 A_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=1}^m (-T_{j+1}^{n+1} + 2T_j^{n+1} - T_{j-1}^{n+1}) Z_j^{n+1}; \\
 A_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=1}^m (v_j^{n+1})^+ C_p(T_j^n) (T_j^{n+1} - T_{j-1}^{n+1}) Z_j^{n+1}; \\
 A_4 &\stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=1}^m (v_j^{n+1})^- C_p(T_j^n) (T_{j+1}^{n+1} - T_j^{n+1}) Z_j^{n+1}; \\
 A_5 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{h}{\tau} \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=1}^m F_j^{n+1} (T_j^{n+1} - T_j^n).
 \end{aligned}$$

Si nous multiplions l'équation (4.3.1) par $\frac{h}{\tau} Z_j^{n+1}$ et si nous sommes sur les indices j et n pour j variant dans $\{1, \dots, m\}$ et pour n variant dans $\{0, \dots, r-1\}$ nous obtenons une égalité qui s'écrit:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = A_5. \quad (4.3.11)$$

Maintenant nous estimons les quantités A_i pour $i = 1, \dots, 5$.

Les quantités A_3 et A_4 se majorent comme la quantité B_2 du lemme 4.3.2.

Considérant l'expression A_3 , nous avons:

$$\begin{aligned}
 (v_j^{n+1})^+ C_p(T_j^n) (T_j^{n+1} - T_{j-1}^{n+1}) Z_j^{n+1} &= \sqrt{\frac{(v_j^{n+1})^+}{u_j^{n+1}}} \sqrt{u_j^{n+1}} \sqrt{C_p(T_j^n) Z_j^{n+1}} \\
 &\quad \sqrt{(v_j^{n+1})^+} \sqrt{C_p(T_j^n) (T_j^{n+1} - T_{j-1}^{n+1})}. \quad (4.3.12)
 \end{aligned}$$

D'après les hypothèses HP1 et HP2 nous pouvons majorer $\frac{(v_j^{n+1})^+}{u_j^{n+1}}$ par μ , l'un des facteurs $C_p(T_j^n)$ par M et $(v_j^{n+1})^+$ par M_1 . L'expression (4.3.12) est donc majorée par:

$$\tau h \sqrt{\mu} \sqrt{M M_1} \left\{ \sqrt{u_j^{n+1} C_p(T_j^n)} \frac{|Z_j^{n+1}|}{\tau} \right\} \left\{ \frac{|T_j^{n+1} - T_{j-1}^{n+1}|}{h} \right\}.$$

En utilisant l'inégalité $2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2$, nous obtenons l'estimation:

$$|A_3| \leq \sqrt{\mu} \left\{ \frac{\epsilon h \tau}{2} \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=1}^m u_j^{n+1} C_p(T_j^n) \left(\frac{Z_j^{n+1}}{\tau} \right)^2 + \frac{M M_1}{2\epsilon} h \tau \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{T_j^{n+1} - T_{j-1}^{n+1}}{h} \right)^2 \right\}. \quad (4.3.13)$$

L'expression A_4 s'estime de manière similaire et on a:

$$|A_4| \leq \sqrt{\mu} \left\{ \frac{\epsilon h \tau}{2} \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=1}^m u_j^{n+1} C_p(T_j^n) \left(\frac{Z_j^{n+1}}{\tau} \right)^2 + \frac{MM_1}{2\epsilon} h \tau \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{T_{j+1}^{n+1} - T_j^{n+1}}{h} \right)^2 \right\}.$$

La quantité A_2 correspond aux termes B_3 et B_4 . Pour l'estimer, nous effectuons une intégration par parties discrète par rapport à l'indice j . En remarquant que:

$$Z_0^{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} T_0^{n+1} - T_0^n = T_w - T_w = 0; \quad Z_{m+1}^{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} T_{m+1}^{n+1} - T_{m+1}^n = T_e - T_e = 0,$$

nous pouvons écrire:

$$A_2 = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=0}^m (T_{j+1}^{n+1} - T_j^{n+1})(Z_{j+1}^{n+1} - Z_j^{n+1}).$$

Dans la relation

$$2a^{n+1}\{a^{n+1} - a^n\} = (a^{n+1})^2 - (a^n)^2 + (a^{n+1} - a^n)^2,$$

nous remplaçons a^n par $T_{j+1}^n - T_j^n$. On en déduit en faisant la sommation sur l'indice n :

$$A_2 = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^r - T_j^r}{h} \right)^2 - \frac{h}{2} \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^0 - T_j^0}{h} \right)^2 + \frac{h}{2} \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^{n+1} - T_j^{n+1}}{h} - \frac{T_{j+1}^n - T_j^n}{h} \right)^2.$$

Les deux premiers termes de A_2 correspondent à l'expression B_3 ; le troisième terme de A_2 correspond à l'expression B_4 .

Pour estimer A_5 , nous commençons par une intégration par parties discrète par rapport à l'indice n . Il vient:

$$A_5 = -\frac{h}{\tau} \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=1}^m (F_j^{n+1} - F_j^n) T_j^n + \frac{h}{\tau} \sum_{j=1}^m F_j^r T_j^r - \frac{h}{\tau} \sum_{j=1}^m F_j^0 T_j^0,$$

où nous avons posé $F_j^0 \stackrel{\text{def}}{=} \tau f(0, y_j)$.

Dans les deux premiers termes de A_5 , nous substituons $T_j^n - T_w + T_w$ à T_j^n . Nous utilisons l'inégalité de Poincaré discrète:

$$\sum_{j=1}^m (T_j^n - T_w)^2 \leq \frac{(m+1)^2}{2} \sum_{j=1}^m \left(T_j^n - T_w - \{T_{j-1}^n - T_w\} \right)^2,$$

ce qui conduit à l'inégalité:

$$h \sum_{j=1}^m (T_j^n - T_w)^2 \leq \frac{Y^2}{2} h \sum_{j=1}^m \left(\frac{T_j^n - T_{j-1}^n}{h} \right)^2.$$

En utilisant l'inégalité $2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2$ ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz, autant de fois que nécessaire, nous obtenons finalement l'estimation:

$$\begin{aligned} |A_5| &\leq \frac{Y^2}{4} h \tau \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^n - T_j^n}{h} \right)^2 + \frac{h \tau}{2} \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\tau^2} \right)^2 + \\ &\frac{\epsilon_1}{2} h \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^r - T_j^r}{h} \right)^2 + \frac{Y^2}{4 \epsilon_1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{F_j^r}{\tau} \right)^2 + \frac{\tau h}{2} \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\tau^2} \right)^2 + \\ &\frac{1}{2} \tau h Y T_w^2 + \frac{h}{2} \sum_{j=1}^m \left(\frac{F_j^r}{\tau} \right)^2 + \frac{Y}{2} T_w^2 + \frac{h}{2} \sum_{j=1}^m \left(\frac{F_j^0}{\tau} \right)^2 + \frac{h}{2} \sum_{j=1}^m (T_j^0)^2. \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

Dans les estimations des expressions A_1, \dots, A_5 précédentes, nous choisissons $\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\mu}}$, et $\epsilon_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}$. En multipliant par 2 la relation (4.3.11), nous déduisons l'inégalité:

$$2 \sum_{i=1}^2 A_i - 2 \sum_{i=3}^4 |A_i| \leq 2 \sum_{i=1}^4 A_i \leq |A_5|,$$

qui avec les estimations précédentes des quantités A_i devient:

$$\begin{aligned} &\tau h \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=1}^m u_j^{n+1} C_p(T_j^{n+1}) \left(\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\tau} \right)^2 + h \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^{n+1} - T_j^{n+1}}{h} - \frac{T_{j+1}^n - T_j^n}{h} \right)^2 + \\ &h \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^r - T_j^r}{h} \right)^2 \leq \left\{ 2\mu M M_1 + \frac{Y^2}{2} \right\} h \tau \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^n - T_j^n}{h} \right)^2 + \\ &2h \tau \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\tau^2} \right)^2 + (1 + Y^2) h \sum_{j=1}^m \left(\frac{F_j^r}{\tau} \right)^2 + h \sum_{j=1}^m \left(\frac{F_j^0}{\tau} \right)^2 + \\ &(1 + X) Y T_w^2 + h \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^0 - T_j^0}{h} \right)^2 + h \sum_{j=0}^m (T_j^0)^2. \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

Les hypothèses HP3 et HP4 concernant les fonctions T_0 et f , le théorème de la moyenne, et le théorème des accroissements finis permettent de montrer que la somme des termes du second membre de l'inégalité (4.3.15), du deuxième au septième, est bornée indépendamment

de h de τ et de r , c'est-à-dire qu'il existe une constante $C(\|T_0\|_{H^1(0,Y)}, \|f\|_{C^1(\overline{Q})})$ telle que

$$2h\tau \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\tau^2} \right)^2 + (1+Y^2)h \sum_{j=1}^m \left(\frac{F_j^r}{\tau} \right)^2 + h \sum_{j=1}^m \left(\frac{F_j^0}{\tau} \right)^2 + (1+X)YT_w^2 + \\ h \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^0 - T_j^0}{h} \right)^2 + h \sum_{j=0}^m (T_j^0)^2 \leq C(\|T_0\|_{H^1(0,Y)}, \|f\|_{C^1(\overline{Q})}) \forall h, \tau \forall r, 0 < r \leq N.$$

En minorant par zéro les deux premières expressions du membre de gauche de l'inégalité (4.3.15), et en majorant le membre de droite de (4.3.15) avec l'inégalité ci-dessus, il vient:

$$h \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^r - T_j^r}{h} \right)^2 \leq \left\{ 2\mu MM_1 + \frac{Y^2}{2} \right\} h\tau \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^n - T_j^n}{h} \right)^2 + \\ C(\|T_0\|_{H^1(0,Y)}, \|f\|_{C^1(\overline{Q})}).$$

Pour tout n tel que $0 < n \leq N$ et pour tout r tel que $0 < r \leq N$ nous définissons θ_n et Θ_r par:

$$\theta_n \stackrel{\text{def}}{=} h \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^n - T_j^n}{h} \right)^2 \quad \Theta_r \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ 2\mu MM_1 + \frac{Y^2}{2} \right\} \tau \sum_{n=0}^r \theta_n + C(\|T_0\|_{H^1(0,Y)}, \|f\|_{C^1(\overline{Q})}).$$

L'inégalité précédente se récrit avec ces notations comme:

$$\theta_r \leq \Theta_{r-1},$$

ce qui implique que

$$\Theta_r - \Theta_{r-1} \leq \left\{ 2\mu MM_1 + \frac{Y^2}{2} \right\} \tau \theta_{r-1} \leq \left\{ 2\mu MM_1 + \frac{Y^2}{2} \right\} \tau \Theta_{r-1}.$$

On en déduit aisément (cf lemme de Gronwall discret) que:

$$\Theta_r \leq C(\|T_0\|_{H^1(0,Y)}, \|f\|_{C^1(\overline{Q})}) \exp \left(\left\{ 2\mu MM_1 + \frac{Y^2}{2} \right\} X \right) \forall r, 0 < r \leq N, \forall \tau, h,$$

ce qui démontre l'estimation (4.3.8) avec

$$\tilde{B}_1 = C(\|T_0\|_{H^1(0,Y)}, \|f\|_{C^1(\overline{Q})}) \exp \left(\left\{ 2\mu MM_1 + \frac{Y^2}{2} \right\} X \right).$$

Utilisant la majoration

$$\Theta_r \leq \tilde{B}_1$$

pour borner le membre de droite de l'inégalité (4.3.15), nous en déduisons immédiatement les estimations (4.3.9) et (4.3.10). Le lemme 4.3.3 est ainsi démontré.

□

Afin de construire une solution faible du problème (P) à partir des familles $\{T_j^n\}_{j=0}^{m+1}$, $n > 0$, il est nécessaire de traduire les estimations du lemme 4.3.3, ainsi que la définition du schéma (4.3.1), en terme de fonctions. Pour cela, dans ce qui suit, nous introduisons des espaces vectoriels de dimension finie et des opérateurs d'interpolation sur ces espaces, technique classique pour les méthodes de différences finies (voir par exemple Raviart [18]). Nous définissons d'une part, les espaces V_h et V_h^0 par:

$$\begin{aligned} V_h &\stackrel{\text{def}}{=} \{w(s) \in C^0[0, Y]; \quad w|_{[y_j, y_{j+1}]} \text{ est un polynôme de degré 1 pour } 0 \leq j \leq m\}; \\ V_h^0 &\stackrel{\text{def}}{=} \{w \in V_h; \quad w(0) = 0, \quad w(Y) = 0\}. \end{aligned}$$

Nous noterons par $\{\varphi_j\}_{j=0}^{m+1}$ la base éléments finis de V_h constituée des fonctions chapeau.

Au produit scalaire (\cdot, \cdot) et à la norme $\|\cdot\|$ usuels dans $L^2(0, Y)$, nous associons le produit scalaire discret $(\cdot, \cdot)_h$ et la norme $\|\cdot\|_h$ définis sur V_h par:

$$\begin{aligned} (u, v)_h &\stackrel{\text{def}}{=} h \sum_{j=1}^m u(y_j)v(y_j) + \frac{h}{2} \{u(y_0)v(y_0) + u(y_{m+1})v(y_{m+1})\}; \\ \|v\|_h^2 &\stackrel{\text{def}}{=} (v, v)_h \quad \forall u, v \in V_h. \end{aligned}$$

Nous définissons d'autre part, les espaces V_h^τ et W^τ par:

$$\begin{aligned} V_h^\tau &\stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi(s) \in C^0(\overline{Q}); \quad \varphi|_{[x_n, x_{n+1}] \times [y_j, y_{j+1}]} \text{ est un polynôme de degré 1 en } x \text{ et } y \\ &\quad \text{pour } 0 \leq n \leq N-1 \text{ et pour } 0 \leq j \leq m\}; \\ W^\tau &\stackrel{\text{def}}{=} \{\psi(\cdot) \in L^2(0, X); \quad \psi|_{(x_n, x_{n+1})} \text{ est une constante pour } 0 \leq n \leq N-1\} \end{aligned}$$

Nous définissons les opérateurs d'interpolation suivants:

$$\begin{aligned}
 r_h : C^0([0, Y]; \mathbf{R}) &\longrightarrow V_h \\
 w &\longmapsto r_h w \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sum_{j=0}^{m+1} w(y_j) \varphi_j; \\
 q^\tau : C^0([0, T]; L^2(0, Y)) &\longrightarrow L^2(Q) \\
 \varphi &\longmapsto q^\tau \varphi, \text{ où } q^\tau \varphi \text{ est constante par morceaux en } x, \\
 &\quad q^\tau \varphi(x, \cdot)|_{[x_n, x_{n+1}]} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \varphi(x_n, \cdot); \\
 \tilde{q}^\tau : C^0([0, T]; L^2(0, Y)) &\longrightarrow L^2(Q) \\
 \varphi &\longmapsto \tilde{q}^\tau \varphi, \text{ où } \tilde{q}^\tau \varphi \text{ est constante par morceaux en } x, \\
 &\quad \tilde{q}^\tau \varphi(x, \cdot)|_{(x_n, x_{n+1}]} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \varphi(x_{n+1}, \cdot); \\
 P_h : C^0([0, Y]; L^2(0, X)) &\longrightarrow L^2(Q) \\
 \varphi &\longmapsto P_h \varphi, \text{ où } P_h \varphi \text{ est constante par morceaux en } y, \\
 &\quad P_h \varphi(\cdot, y)|_{[y_j, y_{j+1}]} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \varphi(\cdot, y_j); \\
 \tilde{P}_h : C^0([0, Y]; L^2(0, X)) &\longrightarrow L^2(Q) \\
 \varphi &\longmapsto \tilde{P}_h \varphi, \text{ où } \tilde{P}_h \varphi \text{ est constante par morceaux en } y, \\
 &\quad \tilde{P}_h \varphi(\cdot, y)|_{(y_j, y_{j+1}]} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \varphi(\cdot, y_{j+1}).
 \end{aligned}$$

A partir des quantités $\{T_j^n\}_{j=0}^{m+1}$ pour $n \geq 0$, nous définissons la fonction $T^* \in V_h^\tau$ par:

$$T^*(x_n, y_j) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} T_j^n \text{ pour tout } j \in \{0, \dots, m+1\} \text{ et pour tout } n \geq 0.$$

De même nous définissons la fonction \bar{T} par:

$$\bar{T} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \tilde{q}^\tau T^* \in \prod_{n=1}^N V_h, \text{ c'est-à-dire, } \tilde{q}^\tau T^*(x, \cdot) \in V_h \text{ pour presque tout } x \in (0, X).$$

Avec ces notations nous introduisons la forme variationnelle suivante:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^X (\tilde{q}^\tau u q^\tau C_p(T^*) \partial_x T^*, \varphi_h)_h \psi^\tau dx + \int_0^X a(\bar{T}, \varphi_h) \psi^\tau dx + \\
 &\int_0^X \int_0^Y \tilde{P}_h [\tilde{q}^\tau v^+ q^\tau C_p(T^*)] \partial_y \bar{T} \tilde{P}_h \varphi_h \psi^\tau dx dy - \\
 &\int_0^X \int_0^Y P_h [\tilde{q}^\tau v^- q^\tau C_p(T^*)] \partial_y \bar{T} P_h \varphi_h \psi^\tau dx dy = \int_0^X (r_h f, \varphi_h)_h \psi^\tau dx, \quad (4.3.16)
 \end{aligned}$$

$\forall \varphi_h \in V_h^0, \forall \psi^\tau \in W^\tau$, où $a(\cdot, \cdot)$ désigne la forme bilinéaire définie par:

$$a(T, \varphi) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \int_0^Y \partial_y T \partial_y \varphi dy.$$

Nous allons montrer que (4.3.16) est équivalente au schéma (4.3.1).

Si nous remplaçons φ_h par la fonction chapeau qui vaut un au point y_j et zéro en tous les y_i pour $i \neq j$, et la fonction ψ^r par la fonction caractéristique de l'intervalle (x_n, x_{n+1}) , il vient:

$$\begin{aligned} & (u(x_{n+1}, \cdot) C_p(T^*(x_n, \cdot)) \{T^*(x_{n+1}, \cdot) - T^*(x_n, \cdot)\}, \varphi_j)_h + \tau \int_0^Y \partial_y \bar{T} \partial_y \varphi_j dy + \\ & \tau \int_0^Y \tilde{P}_h [v^+(x_{n+1}, y) C_p(T^*(x_n, y))] \partial_y \bar{T}(x_{n+1}, y) \tilde{P}_h \varphi_j dy - \\ & \tau \int_0^Y P_h [v^-(x_{n+1}, y) C_p(T^*(x_n, y))] \partial_y \bar{T}(x_{n+1}, y) P_h \varphi_j dy = h F_j^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Vérifions que dans la relation (4.3.17) nous retrouvons une discrétisation décentrée du terme d'advection $v \partial_y H(T)$. Nous avons:

$$\begin{aligned} & \tau \int_0^Y \tilde{P}_h [v^+(x_{n+1}, y) C_p(T^*(x_n, y))] \partial_y \bar{T}(x_{n+1}, y) \tilde{P}_h \varphi_j dy = \\ & v^+(x_{n+1}, y_j) C_p(T^*(x_n, y_j)) (\bar{T}(x_{n+1}, y_j) - \bar{T}(x_{n+1}, y_{j-1})); \end{aligned}$$

ainsi que:

$$\begin{aligned} & \tau \int_0^Y P_h [v^-(x_{n+1}, y) C_p(T^*(x_n, y))] \partial_y \bar{T}(x_{n+1}, y) P_h \varphi_j dy = \\ & v^-(x_{n+1}, y_j) C_p(T^*(x_n, y_j)) (\bar{T}(x_{n+1}, y_{j+1}) - \bar{T}(x_{n+1}, y_j)). \end{aligned}$$

Pour les autres termes de la relation (4.3.17), la comparaison avec le schéma (4.3.1) est immédiate.

Maintenant à partir des résultats du lemme 4.3.3, nous allons donner des majorations a priori pour les fonctions \bar{T} , T^* et pour leurs dérivées.

Lemme 4.3.4. *Supposons les hypothèses HP1 à HP5 satisfaites. Alors les fonctions \bar{T} et T^* vérifient les estimations suivantes:*

$$\|T^*\|_{L^\infty(0, X; H^1(0, Y))} \leq B_1^*; \quad (4.3.18)$$

$$\|\bar{T}\|_{L^\infty(0, X; H^1(0, Y))} \leq B_1^*; \quad (4.3.19)$$

$$\|P_h [\tilde{q}^r \sqrt{u} \partial_x T^*]\|_{L^2(Q)} \leq B_2^*; \quad (4.3.20)$$

$$\|\partial_x T^*\|_{L^2(Q_d)} \leq B_3^* \text{ pour tout } d > 0, \quad (4.3.21)$$

où les B_i^* pour $i \in \{1, \dots, 3\}$ sont des constantes indépendantes de h et de τ mais où B_3 dépend de d .

Démonstration. Pour tout $v_h \in V_h$ il est aisé de montrer que les relations suivantes sont satisfaites:

$$a(v_h, v_h) = h \sum_{j=0}^m \left(\frac{v_h(y_{j+1}) - v_h(y_j)}{h} \right)^2; \quad (4.3.22)$$

$$\|v_h\| \leq \|v_h\|_h, \quad (4.3.23)$$

et que (4.3.22) et (4.3.23) impliquent l'estimation qui suit

$$\sqrt{\int_0^Y v_h^2 dy} \leq \sqrt{Y} \max_{0 \leq j \leq m+1} |v_h(y_j)| \leq \sqrt{Y} \{ \sqrt{Y a(v_h, v_h)} + |v_h(y_0)| \}. \quad (4.3.24)$$

Evaluons la norme $L^\infty(0, X; H^1(0, Y))$ de la fonction T^* . Puisque $T^* \in V_h^r$ on a:

$$\sup_{x \in (0, X)} \sqrt{a(T^*(x, \cdot), T^*(x, \cdot))} = \max_{0 \leq r \leq N} \sqrt{h \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^r - T_j^r}{h} \right)^2}.$$

L'estimation (4.3.24) et la condition limite $T^*(x, 0) = T_w \forall x \in [0, X]$ impliquent

$$\|T^*\|_{L^\infty(0, X; H^1(0, Y))} \leq (1 + Y) \max_{0 \leq r \leq N} \sqrt{h \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^r - T_j^r}{h} \right)^2} + \sqrt{Y} T_w.$$

L'estimation (4.3.8) implique alors (4.3.18) avec $B_1^* = (1 + Y)B_1 + \sqrt{Y}T_w$.

Puisque $\bar{T} = \tilde{q}^r T^* \in \prod_{n=1}^N V_h$, les mêmes arguments montrent que (4.3.19) est une conséquence de (4.3.8), (4.3.22) et (4.3.24).

Montrons maintenant (4.3.20). La fonction T^* appartient à l'espace V_h^r , donc $\partial_x T^*$ est une fonction constante par morceaux en x . L'estimation (4.3.20) est alors une conséquence de l'hypothèse HP1 ($\gamma \leq C_p(s) \leq M \forall s \in \mathbb{R}$) et de ((4.3.9). L'estimation (4.3.21) se déduit de (4.3.23), de (4.3.9) de l'hypothèse HP1 et de l'hypothèse HP2 iii) ($u > 0$ pour $y > 0$). Le lemme 4.3.4 est démontré.

□

Nous terminons cette section en énonçant des résultats qui sont induits par l'estimation (4.3.10) et qui nous seront utiles lorsque nous considérerons le passage à la limite.

Lemme 4.3.5. *Supposons que les hypothèses HP1 à HP5 sont satisfaites. Alors les quantités $T^* - \bar{T} \stackrel{\text{def}}{=} T^* - \tilde{q}^r T^*$, $T^* - q^r T^*$, $P_h q^r T^* - T^*$, $\tilde{P}_h q^r T^* - T^*$, $P_h T^* - T^*$ tendent vers zéro fortement dans $L^2(Q)$ lorsque τ et h tendent vers zéro.*

Démonstration. Pour x tel que $x_n < x < x_{n+1}$, nous avons:

$$(T^* - \bar{T})(x, y) = \frac{x_{n+1} - x}{\tau} (T^*(x_n, y) - T^*(x_{n+1}, y)) \text{ pour tout } y \text{ dans } [0, Y].$$

Un calcul élémentaire montre que:

$$\|T^* - \bar{T}\|_{L^2(Q)}^2 = \frac{\tau}{3} \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^Y (T^*(x_n, y) - T^*(x_{n+1}, y))^2 dy.$$

Puisque $T^*(x_n, 0) - T^*(x_{n+1}, 0) = 0$, on peut utiliser l'inégalité de Poincaré pour obtenir:

$$\begin{aligned} \int_0^Y (T^*(x_n, y) - T^*(x_{n+1}, y))^2 dy &\leq \frac{Y^2}{2} \int_0^Y (\partial_y T^*(x_n, y) - \partial_y T^*(x_{n+1}, y))^2 dy \\ &\leq \frac{Y^2}{2} h \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^{n+1} - T_j^{n+1}}{h} - \frac{T_{j+1}^n - T_j^n}{h} \right)^2. \end{aligned}$$

Avec ce qui précède on obtient:

$$\|T^* - \bar{T}\|_{L^2(Q)}^2 \leq \tau \frac{Y^2}{6} h \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^{n+1} - T_j^{n+1}}{h} - \frac{T_{j+1}^n - T_j^n}{h} \right)^2.$$

L'inégalité (4.3.10) du lemme 4.3.3 permet de conclure que

$$\|T^* - \bar{T}\|_{L^2(Q)}^2 \leq \tau \frac{Y^2}{6} \tilde{B}_2.$$

En procédant de même, nous établissons:

$$\|T^* - q^* T^*\|_{L^2(Q)}^2 \leq \tau \frac{Y^2}{6} \tilde{B}_2.$$

Maintenant nous nous intéressons à $P_h T^* - T^*$. D'une part, sur chaque intervalle $[y_j, y_{j+1})$, on a pour tout $v_h \in V_h$:

$$(P_h v_h - v_h)(y) = (v_h(y_j) - v_h)(y) = -(v_h(y_{j+1}) - v_h(y_j)) \frac{y - y_j}{h},$$

et ainsi:

$$\int_0^Y (P_h v_h - v_h)^2 dy = \frac{h}{3} \sum_{j=0}^m (v_h(y_{j+1}) - v_h(y_j))^2 = \frac{h^3}{3} \sum_{j=0}^m \left(\frac{v_h(y_{j+1}) - v_h(y_j)}{h} \right)^2.$$

D'autre part, pour tout $z \in V_h^r$, la relation suivante est satisfaite:

$$\int_0^X (z(x, y))^2 dx \leq \tau \sum_{n=1}^{N-1} z^2(x_n, y) + \frac{\tau}{2} \{z^2(x_0, y) + z^2(x_N, y)\}.$$

De ces deux dernières relations, on déduit l'inégalité:

$$\begin{aligned} \|P_h T^* - T^*\|_{L^2(Q)}^2 &\leq \frac{\tau h^2}{3} \sum_{n=0}^{N-1} h \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^n - T_j^n}{h} \right)^2 + \\ &\quad \frac{\tau h^2}{3} \left\{ h \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^0 - T_j^0}{h} \right)^2 + h \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^N - T_j^N}{h} \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

qui combinée à l'estimation (4.3.8) du lemme 4.3.3 fournit:

$$\|P_h T^* - T^*\|_{L^2(Q)}^2 \leq \frac{\tau h^2}{3} N \tilde{B}_1 = \frac{X \tilde{B}_1}{3} h^2.$$

En procédant de manière analogue, on obtient l'estimation:

$$\|P_h q^r T^* - q^r T^*\|_{L^2(Q)}^2 \leq \frac{\tau h^2}{3} \sum_{n=0}^{N-1} h \sum_{j=0}^m \left(\frac{T_{j+1}^n - T_j^n}{h} \right)^2 \leq \frac{\tau h^2}{3} N \tilde{B}_1 = \frac{X \tilde{B}_1}{3} h^2.$$

Répétant ces calculs lorsque \tilde{P}_h est substitué à P_h , nous obtenons des estimations similaires. Les autres résultats de convergence donnés par le lemme 4.3.5 s'obtiennent à partir des résultats précédents grâce à l'inégalité triangulaire. Le lemme 4.3.5 est démontré.

□

4.4 Convergence de la solution approchée lorsque h et τ tendent vers zéro.

Les estimations données par le lemme 4.3.4 vont nous permettre de déduire l'existence de sous-suites convergentes à partir des propriétés de compacité classiques de la boule unité d'un espace de Banach séparable (voir par exemple la proposition 11* de [10] vol. 3, page 605). Pour cela, rappelons ces propriétés brièvement.

- i) la boule unité d'un espace de Banach réflexif, séparable est faiblement séquentiellement compacte;
- ii) la boule unité du dual d'un espace vectoriel normé séparable non réflexif est séquentiellement compacte pour la topologie faible.

De plus, afin de pouvoir passer à la limite dans les termes non linéaires nous utilisons un résultat de convergence presque partout dans Q pour ces sous-suites. Pour établir ce résultat, le problème étant dégénéré sur une partie du bord, nous devons utiliser un procédé d'approximation de l'ouvert Q , associé à un procédé d'extraction.

Enonçons le résultat principal de cette section, à savoir l'existence de solutions faibles pour le problème (P) que l'on obtient en passant à la limite lorsque h et τ tendent vers zéro.

Théorème 4.4.1. *Supposons que les hypothèses HP1 à HP5 sont satisfaites. Alors le problème (P) a une unique solution faible T (au sens de la définition 4.2.1). Cette solution est la limite, au sens fort, dans $L^p(Q)$ pour $1 \leq p < \infty$, de la solution approchée T^* construite avec le schéma (4.3.1) lorsque les paramètres τ et h tendent vers zéro.*

Avant de donner la démonstration du théorème 4.4.1, pour tout $N > 0$ et pour tout $m > 0$ nous introduisons deux suites de fonctions $T_{N,m}^*$ et $\bar{T}_{N,m}$, définies à partir des fonctions T^* et \bar{T} de la section précédente. Nous montrons l'existence d'une fonction T et l'existence de sous-suites extraites des suites $T_{N,m}^*$ et $\bar{T}_{N,m}$ qui convergent vers T lorsque N et m tendent vers l'infini.

Auparavant, rappelons les définitions des fonctions T^* et \bar{T} . Avec les notations de la section précédente, pour $N > 0$ et pour $m > 0$ les paramètres τ et h sont donnés par: $\tau = \frac{X}{N}$ et $h = \frac{Y}{m+1}$.

La fonction $T^* \in V_h^r$ est définie par:

$$T^*(x_n, y_j) \stackrel{\text{déf}}{=} T_j^n \text{ pour tout } j \in \{0, \dots, m+1\} \text{ et pour tout } n \geq 0,$$

où la famille $\{T_j^n\}_{j=0}^{m+1}$ vérifie le schéma (4.3.1).

La fonction $\bar{T} \in \prod_{n=1}^N V_h$ est définie par:

$$\bar{T} \stackrel{\text{déf}}{=} \bar{q}^r T^*.$$

Dans ce qui suit pour tout $N > 0$ et pour tout $m > 0$ nous noterons par $T_{N,m}^*$ et $\bar{T}_{N,m}$ les suites de fonctions données par:

$$T_{N,m}^* = T^*, \text{ et par: } \bar{T}_{N,m} = \bar{T}.$$

Lemme 4.4.1. Supposons les hypothèses HP1 à HP5 satisfaites. Alors il existe $T \in L^q(0, X; H^1(0, Y)) \cap H^1(Q_d)$ pour q tel que $1 \leq q \leq \infty$ et pour tout $d > 0$, et il existe deux sous-suites que l'on note encore $T_{N,m}^*$, $\bar{T}_{N,m}$ extraites des suites $T_{N,m}^*$, $\bar{T}_{N,m}$ qui lorsque N et m tendent vers l'infini vérifient:

$$T_{N,m}^* \text{ et } \bar{T}_{N,m} \text{ tendent vers } T \text{ dans } L^q(0, X; H^1(0, Y)) \text{ faiblement pour } 1 \leq q < \infty \\ \text{et dans } L^\infty(0, X; H^1(0, Y)) \text{ faiblement étoile;} \quad (4.4.1)$$

$$P_h(\tilde{q}^r \sqrt{u} \partial_x T_{N,m}^*) \text{ tend vers } \sqrt{u} \partial_x T \text{ dans } L^2(Q) \text{ faiblement;} \quad (4.4.2)$$

$$T_{N,m}^* \text{ tend vers } T \text{ dans } H^1(Q_d) \text{ faiblement, pour tout } d > 0; \quad (4.4.3)$$

$$T_{N,m}^* \text{ tend vers } T \text{ dans } L^p(Q) \text{ fortement, pour } 1 \leq p < \infty, \\ \text{et presque partout dans } Q; \quad (4.4.4)$$

$$\bar{T}_{N,m}; \tilde{q}^r P_h T_{N,m}^*; \tilde{q}^r \bar{P}_h T_{N,m}^* \text{ tendent vers } T \text{ dans } L^2(Q) \text{ fortement,} \\ \text{et presque partout dans } Q. \quad (4.4.5)$$

Démonstration. La démonstration se fait en deux étapes. D'abord nous prouvons les assertions (4.4.1) à (4.4.3), puis nous établissons les assertions (4.4.4) et (4.4.5).

Les estimations (4.3.18) à (4.3.21) du lemme 4.3.4 et les propriétés de compacité séquentielle de la boule unité d'un espace de Banach séparable rappelées au début de cette section fournissent l'existence de fonctions T , T_1 , χ et T_2 et l'existence de sous-suites telles que:

$$T_{N_k, m_k}^* \rightarrow T \text{ dans } L^q(0, X; H^1(0, Y)) \text{ faible pour } 1 \leq q < \infty; \\ T_{N_k, m_k}^* \rightarrow T \text{ dans } L^\infty(0, X; H^1(0, Y)) \text{ faible étoile;} \\ \bar{T}_{N_k, m_k} \rightarrow T_1 \text{ dans } L^q(0, X; H^1(0, Y)) \text{ faible pour } 1 \leq q < \infty; \\ \bar{T}_{N_k, m_k} \rightarrow T_1 \text{ dans } L^\infty(0, X; H^1(0, Y)) \text{ faible étoile;} \\ P_h(\tilde{q}^r \sqrt{u} \partial_x T_{N_k, m_k}^*) \rightarrow \chi \text{ dans } L^2(Q) \text{ faible;} \\ T_{N_k, m_k}^* \rightarrow T_2 \text{ dans } H^1(Q_d) \text{ faible pour tout } d > 0.$$

Il nous faut donc montrer pour vérifier (4.4.1) et (4.4.2) que:

$$T_1 = T_2 = T; \text{ et que } \chi = \sqrt{u} \partial_x T.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit:

$$|\int_Q (T_{N_k, m_k}^* - \bar{T}_{N_k, m_k}) \varphi \, dx dy| \leq \|T_{N_k, m_k}^* - \bar{T}_{N_k, m_k}\|_{L^2(Q)} \|\varphi\|_{L^2(Q)}, \quad \forall \varphi \in L^2(Q).$$

Le lemme 4.3.5 nous indique que le membre de droite de cette inégalité tend vers zéro lorsque N_k et m_k tendent vers l'infini pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$. Ainsi $T = T_1$ dans $\mathcal{D}'(Q)$. Montrons maintenant que $\chi = \sqrt{u} \partial_x T$. Auparavant rappelons que grâce à l'hypothèse HP2 i) puisque $u \geq 0$ sur \bar{Q} , le théorème des accroissements finis et l'inégalité:

$$|a - b|^2 \leq |a^2 - b^2| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+,$$

impliquent que la fonction \sqrt{u} est Höldérienne d'ordre $\frac{1}{2}$ sur \bar{Q} . Nous pouvons donc affirmer que le lemme suivant est vrai.

Lemme 4.4.2.

$P_h \tilde{q}^\tau \sqrt{u} \rightarrow \sqrt{u}$ fortement dans $L^q(Q)$ lorsque $h \rightarrow 0$ pour $1 \leq q < \infty$.

Soit $d > 0$ fixé, montrons que $\partial_x T \in L^2(Q_d)$.

Pour tout $\psi \in \mathcal{D}(Q_d)$ on considère l'expression suivante:

$$\partial_x T(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{Q_d} T \partial_x \psi \, dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N_k, m_k \rightarrow \infty} - \int_{Q_d} T_{N_k, m_k}^* \partial_x \psi \, dx dy.$$

Par ailleurs, d'après l'estimation (4.3.21), l'inégalité de Cauchy-Schwarz conduit à:

$$- \int_{Q_d} T_{N_k, m_k}^* \partial_x \psi \, dx dy = \int_{Q_d} \partial_x T_{N_k, m_k}^* \psi \, dx dy \leq B_3^* \|\psi\|_{L^2(Q_d)},$$

ainsi on en déduit que:

$$\partial_x T(\psi) \leq B_3^* \|\psi\|_{L^2(Q_d)}.$$

En utilisant la densité de $\mathcal{D}(Q_d)$ dans $L^2(Q_d)$ la forme linéaire $\partial_x T \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(Q_d); \mathbb{R})$, continue pour la norme de $L^2(Q_d)$ peut être prolongée en un élément de $\mathcal{L}(L^2(Q_d); \mathbb{R})$. On a donc prouvé que $\partial_x T \in L^2(Q_d)$ puisque le dual de $L^2(Q_d)$ est $L^2(Q_d)$.

Lemme 4.4.3.

$$P_h (\tilde{q}^\tau \sqrt{u} \partial_x T_{N_k, m_k}^*) \rightarrow \sqrt{u} \partial_x T \text{ dans } \mathcal{D}'(Q).$$

Démonstration. Définissons A par l'expression suivante:

$$A \stackrel{\text{def}}{=} A(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_Q \{ P_h (\tilde{q}^\tau \sqrt{u} \partial_x T_{N_k, m_k}^*) - \sqrt{u} \partial_x T \} \varphi \, dx dy \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q).$$

Remarquant que $P_h \partial_x T_{N_k, m_k}^* = \partial_x P_h T_{N_k, m_k}^*$, A peut encore s'écrire:

$$A = \int_Q \{ P_h \tilde{q}^\tau \sqrt{u} \partial_x P_h T_{N_k, m_k}^* - \sqrt{u} \partial_x T \} \varphi \, dx dy,$$

et on peut donc majorer $|A|$ par:

$$|A| \leq \left| \int_Q \{ P_h \tilde{q}^\tau \sqrt{u} - \sqrt{u} \} \partial_x P_h T_{N_k, m_k}^* \varphi \, dx dy \right| + \left| \int_Q \sqrt{u} \{ \partial_x P_h T_{N_k, m_k}^* - \partial_x T \} \varphi \, dx dy \right|.$$

Pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$, soit $K \stackrel{\text{def}}{=} \text{supp } \varphi$, son support. Le sous-ensemble compact K est strictement inclus dans Q . L'inégalité précédente se transforme en:

$$|A| \leq \|P_h \tilde{q}^\tau \sqrt{u} - \sqrt{u}\|_{L^2(K)} \|\partial_x P_h T_{N_k, m_k}^*\|_{L^2(K)} \|\varphi\|_{L^\infty(K)} + \left| \int_Q \sqrt{u} \{ \partial_x P_h T_{N_k, m_k}^* - \partial_x T \} \varphi \, dx dy \right|.$$

En intégrant par parties nous avons pour le deuxième terme du membre de gauche de l'inégalité:

$$\int_Q \partial_x \{P_h T_{N_k, m_k}^* - T\} \sqrt{u} \varphi \, dx dy = - \int_Q \{P_h T_{N_k, m_k}^* - T\} \partial_x (\sqrt{u} \varphi) \, dx dy.$$

L'hypothèse HP2 implique que $\partial_x (\sqrt{u} \varphi) \in L^2(Q)$, ainsi d'après le lemme 4.3.5 et l'inégalité de Hölder on en déduit que l'expression ci-dessus tend vers zéro lorsque N_k et m_k tendent vers l'infini.

L'estimation (4.3.9) et les hypothèses HP1 et HP2 iii) entraînent que $\|\partial_x P_h T_{N_k, m_k}^*\|_{L^2(K)}$ est bornée indépendamment de N_k et de m_k . Ainsi le lemme 4.4.2 implique que:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(Q) \quad \lim_{N_k, m_k \rightarrow \infty} |A(\varphi)| = \lim_{N_k, m_k \rightarrow \infty} |A| = 0. \quad (4.4.6)$$

Le lemme 4.4.3 est démontré.

□

Sachant que

$$P_h \left(\tilde{q}^r \sqrt{u} \partial_x T_{N_k, m_k}^* \right) \longrightarrow \chi \text{ dans } \mathcal{D}'(Q),$$

le lemme 4.4.3 entraîne que $\chi = \sqrt{u} \partial_x T$, ce qui prouve l'assertions (4.4.2).

L'assertion (4.4.3) est alors une conséquence de (4.4.1) et de l'hypothèse HP2 iii) ($u > 0$ dans Q) et de (4.4.2).

D'après la propriété (4.4.1) nous savons que $T_{N_k, m_k}^* \rightharpoonup T$ dans $L^2(Q)$ faiblement, donc, a fortiori aussi dans $L^2(Q_d)$ faiblement. En utilisant la propriété (4.4.3) et la compacité de l'injection de $H^1(Q_d)$ dans $L^2(Q_d)$, on obtient que $T_{N_k, m_k}^* \longrightarrow T_2$ dans $L^2(Q_d)$ fortement. L'unicité de la limite d'une suite convergente dans un espace séparé permet de conclure que $T = T_2$.

Montrons maintenant les assertions (4.4.4) et (4.4.5), et pour ne pas alourdir les notations nous notons $T_{N, m}^*$ la sous-suite que nous notions précédemment T_{N_k, m_k}^* .

Pour cela, nous utilisons les résultats de convergence du lemme 4.3.5, une approximation de Q par une suite croissante d'ouverts strictement inclus dans Q et un procédé d'extraction. Pour k entier non négatif, nous définissons Q^k par:

$$Q^k \stackrel{\text{déf}}{=} \{(x, y) \in Q \text{ tels que } y > \frac{1}{k}\} = Q_{\frac{1}{k}}.$$

Pour tout $k \geq \inf(1, \frac{1}{\tilde{q}})$, nous définissons

$$(T_{N, m}^*)^k \stackrel{\text{déf}}{=} T_{N, m}^*|_{Q^k}.$$

Il est alors immédiat que la famille de fonctions $(T_{N, m}^*)^k$ est bornée dans $H^1(Q^k)$ (cf (4.3.18)) indépendamment de N et de m . Il existe donc une fonction $T^k \in H^1(Q^k)$ et il

existe une sous-suite extraite, notée $(T_{N_l, m_l}^*)^k$ qui converge vers un T^k faiblement dans $H^1(Q^k)$, et fortement dans $L^q(Q^k)$ pour $1 \leq q < \infty$, lorsque N_l, m_l tendent vers l'infini (c'est-à-dire lorsque h et τ tendent vers zéro). L'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(Q^k)$ et l'assertion (4.4.3) impliquent que:

$$T^k = T^k \stackrel{\text{déf}}{=} T|_{Q^k}.$$

Soit q tel que $1 \leq q < \infty$ nous désignons par $T_{N_l, m_l, k}^*$ la suite convergente que l'on considère sur chaque ouvert Q^k lorsque N_l, m_l tendent vers l'infini.

Par ailleurs il n'est pas difficile d'obtenir la majoration suivante:

$$\|T_{N_l, m_l, k}^* - T\|_{L^q(Q)} \leq \|(T_{N_l, m_l}^*)^k - T^k\|_{L^q(Q^k)} + \|T_{N_l, m_l, k}^* - T\|_{L^q(Q \setminus Q^k)}.$$

L'expression $T_{N_l, m_l}^* - T$ est uniformément bornée dans $L^\infty(0, X; H^1(0, Y))$ (cf (4.3.18)) nous pouvons donc affirmer que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists K(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k > K(\epsilon), \text{ on ait } \|T_{N_l, m_l, k}^* - T\|_{L^q(Q|Q^k)} \leq \epsilon.$$

Pour k fixé tel que $k > K(\epsilon) + 1$, nous pouvons choisir N_l et m_l suffisamment grands tels que:

$$\|(T_{N_l, m_l}^*)^k - T^k\|_{L^q(Q^k)} < \epsilon,$$

puisque nous savons que $T_{N_l, m_l, k}^* \longrightarrow T$ dans $L^q(Q^k)$.

Nous avons donc montré que:

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists K(\epsilon) \text{ tel que } \forall k \geq K(\epsilon), \quad \exists \tilde{N}(\epsilon, k), \quad \exists M(\epsilon, k) \text{ tels que} \\ \forall N_l \geq \tilde{N}(\epsilon, k), \quad \forall m_l \geq M(\epsilon, k) \text{ on ait } \|T_{N_l, m_l, k}^* - T\|_{L^q(Q)} \leq \epsilon. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Remarquons que les indices N_l et m_l dépendent de l'indice k .

Montrons maintenant que de cet ensemble de sous-suites $T_{N_l, m_l, k}^*$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers T dans $L^q(Q)$ lorsque N_l, m_l, k tendent vers l'infini. Pour cela il nous suffit de montrer que:

$$\forall \eta > 0, \exists P_0(\eta) \text{ tel que } \forall p \geq P(\eta) \text{ on ait } \|T_{N_l(p), m_l(p), k(p)}^* - T\|_{L^q(Q)} \leq \eta.$$

On définit $\tilde{K}(p)$, $\tilde{N}(p)$, $\tilde{M}(p)$ pour $p > 1$ (ayant fixé $\tilde{K}(0) = \tilde{N}(0) = \tilde{M}(0) = 0$) par:

$$\begin{aligned} \tilde{K}(p) &\stackrel{\text{déf}}{=} \max \left[K\left(\frac{1}{p}\right), \tilde{K}(p-1) \right]; \\ \tilde{N}(p) &\stackrel{\text{déf}}{=} \max \left[N\left(\frac{1}{p}, k(p)\right), \tilde{N}(p-1) \right]; \\ \tilde{M}(p) &\stackrel{\text{déf}}{=} \max \left[M\left(\frac{1}{p}, k(p)\right), \tilde{M}(p-1) \right]. \end{aligned}$$

On pose alors:

$$k(p) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{K}(p); N_I(p) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{N}(p); m_I(p) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{M}(p).$$

On définit $P_0(\eta)$ par: $P_0(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} E(\frac{1}{\eta}) + 1$, où E représente la partie entière. Il est immédiat de vérifier que d'après (4.4.7) on a:

$$\|T_{N_I(P_0), m_I(P_0), k(P_0)}^* - T\|_{L^q(Q)} \leq \frac{1}{P_0} \leq \eta,$$

et que cette relation reste vraie pour tout $p \geq P_0$ puisque $k(r) \geq k(p)$, $N_I(r) \geq N_I(p)$, $m_I(r) \geq m_I(p)$ pour tout $r \geq p$.

Nous avons donc montré que l'on pouvait extraire une sous-suite de $T_{N,m}^*$ qui converge fortement vers T dans $L^q(Q)$ pour $1 \leq q < \infty$ lorsque N et m tendent vers l'infini.

Nous utilisons alors un théorème classique (voir théorème 3.12 p. 65 de Rudin [19] par exemple) pour obtenir la convergence presque partout dans Q d'une sous-suite extraite de $T_{N,m}^*$ encore notée $T_{N,m}^*$ vers T . L'assertion (4.4.4) est ainsi prouvée.

La convergence forte de \bar{T} ; $q^\tau P_h T^*$; $q^\tau \bar{P}_h T^*$ vers T dans $L^2(Q)$ devient une conséquence immédiate du lemme 4.3.5. La convergence presque partout à une sous-suite près est obtenue comme précédemment. Le lemme 4.4.1 est démontré.

□

Nous sommes en mesure maintenant de prouver le théorème 4.4.1.

Démonstration du théorème 4.4.1. Avec le lemme 4.4.1 nous avons montré l'existence d'une fonction $T \in L^2(0, X; H^1(0, Y))$ telle que $u \partial_x T \in L^2(Q)$ qui est la limite d'une sous-suite extraite de la suite $T_{N,m}^*$, encore notée $T_{N,m}^*$. Il reste donc à montrer que cette fonction T est une solution faible de (P) . L'unicité des solutions faibles (cf théorème 4.2.1) entraînant par ailleurs que c'est toute la suite $T_{N,m}^*$ qui converge vers T .

Montrons que nous pouvons passer à la limite dans la forme variationnelle (4.3.16) du schéma (4.3.1), c'est-à-dire dans l'expression suivante:

$$\begin{aligned} & \int_0^X (\tilde{q}^\tau u q^\tau C_p(T_{N_h, m_h}^*) \partial_x T_{N_h, m_h}^*, \varphi_h)_h \psi^\tau dx + \int_0^X a(\bar{T}, \varphi_h) \psi^\tau dx + \\ & \int_0^X \int_0^Y \bar{P}_h [\tilde{q}^\tau v^+ q^\tau C_p(T_{N_h, m_h}^*)] \partial_y \bar{T} \bar{P}_h \varphi_h \psi^\tau dx dy - \\ & \int_0^X \int_0^Y P_h [\tilde{q}^\tau v^- q^\tau C_p(T_{N_h, m_h}^*)] \partial_y \bar{T} P_h \varphi_h \psi^\tau dx dy = \int_0^X (r_h f, \varphi_h)_h \psi^\tau dx, \quad (4.4.7) \end{aligned}$$

où pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0, Y)$ et pour tout $\psi \in \mathcal{D}(0, X)$ nous avons défini φ_h et ψ^τ par:

$$\varphi_h \stackrel{\text{def}}{=} r_h \varphi;$$

$$\psi^\tau \stackrel{\text{def}}{=} q^\tau \psi.$$

Considérons le premier terme de l'expression (4.4.7) que nous noterons D_1 .

$$D_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^X (\tilde{q}^\tau u q^\tau C_p(T^*) \partial_x T^*, \varphi_h)_h \psi^\tau dx.$$

Remarquons que pour θ , w dans $C^0[0, Y]$, et φ_h dans V_h^0 , puisque $\varphi_h(0) = \varphi_h(Y) = 0$, nous avons:

$$\begin{aligned} (\theta, \varphi_h)_h &= (P_h \theta, P_h \varphi_h); \\ P_h(\theta w) &= P_h(\theta) P_h(w), \end{aligned}$$

alors nous pouvons écrire:

$$(\tilde{q}^\tau u q^\tau C_p(T_{N_k, m_k}^*) \partial_x T_{N_k, m_k}^*, \varphi_h)_h = (P_h[\tilde{q}^\tau \sqrt{u} q^\tau C_p(T_{N_k, m_k}^*)] P_h[\tilde{q}^\tau \sqrt{u} \partial_x T_{N_k, m_k}^*], P_h \varphi_h).$$

Il s'agit donc d'étudier la convergence de:

$$\int_0^X (P_h[\tilde{q}^\tau \sqrt{u} q^\tau C_p(T_{N_k, m_k}^*)] P_h[\tilde{q}^\tau \sqrt{u} \partial_x T_{N_k, m_k}^*], P_h \varphi_h) \psi^\tau dx.$$

Nous savons que

$$\begin{aligned} P_h \varphi_h \psi^\tau &\longrightarrow \varphi \psi & L^2(Q) \text{ fortement}; \\ P_h[\tilde{q}^\tau \sqrt{u} \partial_x T_{N_k, m_k}^*] &\longrightarrow \sqrt{u} \partial_x T & L^2(Q) \text{ faiblement (cf Lemme 4.4.1)}; \\ P_h \tilde{q}^\tau C_p(T_{N_k, m_k}^*) &= C_p(P_h \tilde{q}^\tau T_{N_k, m_k}^*) \longrightarrow C_p(T) \text{ presque partout dans } Q, \end{aligned}$$

ce qui implique la convergence de:

$$P_h[\tilde{q}^\tau \sqrt{u} q^\tau C_p(T_{N_k, m_k}^*)] \longrightarrow \sqrt{u} C_p(T) \text{ presque partout dans } Q.$$

De plus la quantité $P_h[\tilde{q}^\tau \sqrt{u} q^\tau C_p(T_{N_k, m_k}^*)]$ reste bornée dans $L^\infty(Q)$, alors le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et la définition de $C_p(T) = H'(T)$ impliquent que

$$D_1 \longrightarrow \int_Q u \partial_x H(T) \varphi \psi dx dy.$$

Étudions la convergence du second terme de l'expression (4.4.7), c'est-à-dire:

$$\int_0^X a(\bar{T}_{N, m}, \varphi_h) \psi^\tau dx.$$

Il est immédiat de montrer à partir du lemme 4.4.1 et des propriétés:

$$\begin{aligned} \varphi_h &\rightarrow \varphi \text{ fortement dans } H^1(0, Y) \text{ lorsque } m \rightarrow \infty \\ \psi^\tau &\rightarrow \psi \text{ fortement dans } L^2(0, X) \text{ lorsque } N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

que l'intégrale ci-dessus converge vers

$$\int_Q \{ \partial_y T \partial_y \varphi \} \psi \, dx dy,$$

et de même il est immédiat que

$$\int_0^X (r_h f, \varphi_h)_h \psi^\tau \, dx$$

converge vers

$$\int_Q f \varphi \psi \, dx dy.$$

Examinons maintenant la première partie du terme convectif de l'expression (4.4.7):

$$\int_0^X \int_0^Y \tilde{P}_h [\tilde{q}^\tau v^+ q^\tau C_p(T^*)] \partial_y \bar{T} \tilde{P}_h \varphi_h \psi^\tau \, dx dy.$$

On vérifie que:

$$\tilde{P}_h [\tilde{q}^\tau v^+ q^\tau C_p(T_{N,m}^*)] = [\tilde{P}_h \tilde{q}^\tau v^+] C_p(\tilde{P}_h q^\tau T_{N,m}^*).$$

Les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_h \tilde{q}^\tau v^+ &\longrightarrow v^+ \text{ dans } L^\infty(Q) \text{ fortement ;} \\ C_p(\tilde{P}_h q^\tau T_{N,m}^*) &\longrightarrow C_p(T) \text{ presque partout dans } Q; \\ C_p(\tilde{P}_h q^\tau T_{N,m}^*) &\text{ est bornée dans } L^\infty(Q), \end{aligned}$$

implique la convergence de:

$$\int_Q \tilde{P}_h [\tilde{q}^\tau v^+ q^\tau C_p(T_{N,m}^*)] \partial_y \bar{T}_{N,m} \tilde{P}_h \varphi_h \psi^\tau \, dx dy \longrightarrow \int_Q v^+ C_p(T) \partial_y T \varphi \psi \, dx dy.$$

La deuxième partie du terme convectif de l'expression (4.4.7):

$$- \int_0^X \int_0^Y P_h [\tilde{q}^\tau v^- q^\tau C_p(T^*)] \partial_y \bar{T} P_h \varphi_h \psi^\tau \, dx dy$$

se traite de la même façon. Finalement on obtient que T satisfait l'égalité:

$$\begin{aligned} \int_Q (u \partial_x H(T) + v \partial_y H(T)) \varphi \psi + \partial_y T \partial_y (\varphi \psi) \, dx dy &= \int_Q f \varphi \psi \, dx dy. \\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, Y), \forall \psi \in \mathcal{D}(0, X). \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

La densité du sous-espace vectoriel ci-dessous:

$$\left\{ \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} a_{ij} \varphi_i \psi_j, \text{ où } \varphi_i \in \mathcal{D}(0, Y), \psi_j \in \mathcal{D}(0, X), a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ et où } I, J \text{ sont des ensembles finis} \right\}$$

dans $\mathcal{D}(Q)$ permet d'affirmer que la relation (4.4.8) reste vérifiée si $\varphi\psi$ est remplacée par $\Phi \in \mathcal{D}(Q)$. La densité de $\mathcal{D}(Q)$ dans $L^2(0, X; H_0^1(0, Y))$ implique que la relation (4.4.8) reste valide pour n'importe quel $\Phi \in L^2(0, X; H_0^1(0, Y))$.

Il nous reste maintenant à examiner quelles sont les conditions aux limites que satisfait la fonction T .

L'hypothèse HP2 i) et le lemme 4.4.1 impliquent que:

$$uT_{N,m}^* \rightharpoonup uT \text{ faiblement dans } H^1(Q_d) \text{ pour tout } d > 0 \text{ lorsque } N, m \rightarrow \infty.$$

Pour tout $d > 0$, en remplaçant Q par Q_d et $(0, Y)$ par (d, Y) dans l'énoncé du lemme 4.2.3 nous obtenons l'existence d'une application linéaire γ_d^* continue de $H^1(Q_d)$ dans $L^2(d, Y)$. L'application étant linéaire, elle est continue lorsque $H^1(Q_d)$ et $L^2(d, Y)$ sont munis de leur topologie faible (voir théorème 3.9 p. 39 de Brezis [5]).

On en déduit:

$$(uT_{N,m}^*)(0, \cdot) \rightharpoonup (uT)(0, \cdot) \text{ faiblement dans } L^2(d, Y) \forall d > 0 \text{ lorsque } N, m \rightarrow \infty. \quad (4.4.9)$$

Par ailleurs, il est bien connu que l'hypothèse HP3 implique:

$$r_h T_0 \rightarrow T_0 \text{ fortement dans } L^2(0, Y) \text{ lorsque } m \rightarrow \infty. \quad (4.4.10)$$

On déduit alors de la relation:

$$u(0, y) \{T_{N,m}^*(0, y) - r_h T_0(y)\} = 0 \text{ pour tout } 0 \leq y \leq Y,$$

et de (4.4.9) que

$$u(0, \cdot) r_h T_0 \rightharpoonup (uT)(0, \cdot) \text{ faiblement dans } L^2(d, Y) \text{ pour tout } d > 0 \text{ lorsque } m \rightarrow \infty.$$

La propriété (4.4.10) implique alors que:

$$(uT)(0, \cdot) = u(0, \cdot) T_0 \text{ dans } L^2(d, Y) \text{ pour tout } d > 0. \quad (4.4.11)$$

Montrons maintenant que (4.4.11) implique que

$$(uT)(0, \cdot) = u(0, \cdot) T_0 \text{ dans } L^2(0, Y). \quad (4.4.12)$$

Pour tout $l > 0$, soit χ_l la fonction caractéristique de l'intervalle $(\frac{1}{l}, Y)$. Il est immédiat de vérifier d'après (4.4.11) que

$$\chi_l(uT)(0, \cdot) \rightarrow u(0, \cdot) T_0 \text{ presque partout dans } (0, Y);$$

et que

$$[\chi_l(uT)(0, \cdot)]^2 \leq [u(0, \cdot) T_0]^2 \in L^1(0, Y).$$

Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue implique que:

$$(uT)(0, \cdot) \in L^2(0, Y), \text{ et } \lim_{l \rightarrow \infty} \|\chi_l(uT)(0, \cdot) - u(0, \cdot)T_0\|_{L^2(0, Y)} = 0.$$

De la propriété $(uT)(0, \cdot) \in L^2(0, Y)$ on déduit

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|\chi_l(uT)(0, \cdot) - (uT)(0, \cdot)\|_{L^2(0, Y)} = 0$$

et donc (4.4.12) est vraie.

A l'aide d'arguments similaires à ceux que nous venons d'utiliser, la propriété (4.4.1) et les applications γ_0^y, γ_Y^y du lemme 4.2.2 impliquent que:

$$T(x, 0) = T_w; \text{ et } T(x, Y) = T_e \text{ dans } L^2(0, X).$$

Les conditions aux limites (4.2.2), (4.2.3) sont donc satisfaites, et T est une solution faible du problème (P). Le théorème 4.4.1 est démontré.

□

Annexe 1. Un problème linéaire parabolique dégénéré annexe.

Dans cette dernière section, nous donnons la démonstration du lemme 4.2.4. Pour le confort du lecteur, nous redonnons l'énoncé du lemme 4.2.4 sous la forme d'un théorème en conservant les notations de la section 2 du chapitre 4.

Pour α, β et F des fonctions définies dans Q , on s'intéresse au problème suivant:

trouver ϕ vérifiant

$$\begin{aligned} \alpha \partial_x \phi + \beta \partial_y \phi - \partial_{yy}^2 \phi &= \alpha F \text{ dans } Q; \\ \phi(x, 0) = \phi(x, Y) &= 0 \quad \text{dans } (0, X); \\ \phi(0, y) &= 0 \quad \text{pour } 0 \leq y \leq Y \text{ pour tout } d > 0. \end{aligned}$$

Théorème A.1.1. Soit α, β des fonctions de $L^\infty(Q)$ et F une fonction de $L^2(Q)$ données. Si on suppose

- i) qu'il existe une fonction non négative $\theta \in C^0(\overline{Q})$ telle que $\theta(x, y) > 0$ pour tout $y > 0$ et tout $x \in [0, X]$, et satisfaisant $\alpha(x, y) \geq \theta(x, y)$ presque partout dans Q ;
- ii) qu'il existe une constante $\mu_1 > 0$ telle que $\sup_{(x,y) \in Q} \text{ess} \frac{|\beta(x,y)|}{\alpha(x,y)} \leq \mu_1$;

alors il existe une fonction $\phi \in L^2(0, X; H_0^1(0, Y))$, telle que $\alpha \partial_x \phi \in L^2(Q)$ et vérifiant les égalités suivantes:

$$\int_Q \{\alpha \partial_x \phi + \beta \partial_y \phi\} w \, dx dy + \int_Q \partial_y \phi \partial_y w \, dx dy = \int_Q \alpha F w \, dx dy$$

pour tout $w \in L^2(0, X; H_0^1(0, Y))$; (A.1.1)

$$\phi(0, y) = 0 \text{ dans } L^2(d, Y), \quad \text{pour tout } d > 0. \quad (\text{A.2.2})$$

De plus $\phi \in L^2(0, X; H^2(0, Y))$.

pour la démonstration nous utiliserons les méthodes classiques pour les opérateurs paraboliques (voir par exemple Ladyzenskaya-Solonnikov-Ural'ceva [13] pages 153-154 et 177). On régularise le problème, puis on approxime le problème régularisé par une méthode de Galerkin. La régularité des fonctions de base utilisées permet d'établir les estimations a priori suffisantes pour passer à la limite. Les étapes de la démonstration sont donc les suivantes.

-1 Nous introduisons $\alpha^\epsilon(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(x, y) + \epsilon$, et nous considérons le problème (P^ϵ) :

trouver ϕ^ϵ telle que

$$\alpha^\epsilon \partial_x \phi^\epsilon + \beta \partial_y \phi^\epsilon - \partial_{yy}^2 \phi^\epsilon = \alpha F, \quad \text{dans } Q; \quad (\text{A.1.3})$$

$$\phi^\epsilon(x, 0) = \phi^\epsilon(x, Y) = 0, \quad \text{pour } 0 \leq x \leq X; \quad (\text{A.1.4})$$

$$\phi^\epsilon(0, y) = 0, \quad \text{pour } 0 \leq y \leq Y. \quad (\text{A.1.5})$$

- 2 Nous construisons une suite $\{\Phi_N^\epsilon\}_{N=N_0}^\infty$; $\Phi_N^\epsilon \in V$, d'approximation de type Galerkin pour le problème (P^ϵ) , V étant un espace de dimension finie.
- 3 Nous établissons des estimations pour les fonctions Φ_N^ϵ , uniformes en N et ϵ .
- 4 Nous passons à la limite simultanément lorsque ϵ tend vers zéro et N tend vers l'infini, utilisant un procédé diagonal. Nous aurons obtenu ce faisant une solution du problème (A.1.1), (A.1.2).

Etape 2, existence d'une solution approchée pour le problème (P^ϵ)

Soit $\{\varphi_k\}$ une base de $H_0^1(0, Y)$ orthonormale dans $L^2(0, Y)$. On prend $\{\varphi_k\}$, les fonctions propres de l'opérateur $-\frac{d^2}{dy^2}$ avec des conditions de Dirichlet homogènes qui sont données par:

$$\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{Y}} \sin\left(\frac{k\pi}{Y}y\right).$$

Pour $N > 0$ nous définissons alors Φ_N^ϵ par:

$$\Phi_N^\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^N C_N^k(x) \varphi_k(y).$$

Si on dénote le produit scalaire usuel de $L^2(0, Y)$ par $(\cdot, \cdot)_{L^2(0, Y)}$, les C_N^k sont données par:

$$C_N^k \stackrel{\text{def}}{=} (\Phi_N^\epsilon, \varphi_k)_{L^2(0, Y)}, \quad (\text{A.1.6})$$

et résulterons des relations ci-dessous:

$$(\alpha^\epsilon \partial_x \Phi_N^\epsilon + \beta \partial_y \Phi_N^\epsilon, \varphi_r)_{L^2(0, Y)} + (\partial_y \Phi_N^\epsilon, \partial_y \varphi_r)_{L^2(0, Y)} = (\alpha F, \varphi_r)_{L^2(0, Y)},$$

pour $1 \leq r \leq N$; (A.1.7)

$$\Phi_N^\epsilon(0, Y) = 0. \quad (\text{A.1.8})$$

Lemme A.1.1. Soit α, β des fonctions de $L^\infty(Q)$ et F une fonction de $L^2(Q)$ données. Si on suppose que α est une fonction non négative, alors pour tout $N > 0$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe une unique fonction $\Phi_N^\epsilon \in H^1(0, X; H^1(0, Y))$ solution des équations (A.1.7), (A.1.8).

Démonstration. Soit le vecteur \tilde{C}_N ayant pour composantes les fonctions (C_N^1, \dots, C_N^N) et soit le vecteur \tilde{F} ayant pour composantes $((\alpha F, \varphi_1)_{L^2(0, Y)}, \dots, (\alpha F, \varphi_N)_{L^2(0, Y)})$.

On définit les $N \times N$ matrices \mathbf{I} et \mathbf{A} par:

$$\mathbf{I}_{r,k} \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha^\epsilon \varphi_k, \varphi_r)_{L^2(0, Y)};$$

$$\mathbf{A}_{r,k} \stackrel{\text{def}}{=} (\beta \partial_y \varphi_k, \varphi_r)_{L^2(0, Y)} + (\partial_y \varphi_k, \partial_y \varphi_r)_{L^2(0, Y)}; \quad 1 \leq k, r \leq N.$$

Il est aisé de vérifier que les équations (A.1.7),(A.1.8) sont équivalentes au système linéaire d'équations différentielles ci-dessous:

$$\mathbf{I} \frac{d}{dx} \tilde{C}_N + \mathbf{A} \tilde{C}_N = \tilde{F}.$$

La matrice \mathbf{I} est symétrique, définie positive (puisque $\alpha^\epsilon \geq \epsilon > 0$), ainsi \mathbf{I}^{-1} existe et est une matrice à coefficient dans $L^\infty(0, X)$.

Le système précédent s'écrit:

$$\frac{d}{dx} \tilde{C}_N + \mathbf{I}^{-1} \mathbf{A} \tilde{C}_N = \mathbf{I}^{-1} \tilde{F}; \quad (\text{A.1.9})$$

$$\tilde{C}_N(0) = \tilde{0}. \quad (\text{A.1.10})$$

La matrice $\mathbf{I}^{-1} \mathbf{A}$ est une matrice dont les coefficients sont des fonctions appartenant à $L^\infty(0, Y)$, donc appartenant aussi à $L^1(0, Y)$, et $\mathbf{I}^{-1} \tilde{F}$ appartient à $[L^2(0, X)]^N$. Le système (A.1.9),(A.1.10) possède un unique vecteur solution $\tilde{C}_N \in [H^1(0, X)]^N$ (voir par exemple Coddington-Levinson [9] p. 97). Le lemme A.1.1 est démontré.

□

Etape 3, estimations a priori pour Φ_N^ϵ

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le lemme suivant:

Lemme A.1.2. Soit $\Phi_N^\epsilon \in H^1(0, X; H_0^1(0, Y))$ l'approximation de Galerkin de la solution du problème (P^ϵ) définie au lemme A.1.1. Alors il existe des constantes, M_1 et M_2 , indépendantes de ϵ et de N telles que:

$$\|\Phi_N^\epsilon\|_{L^\infty(0, X; H_0^1(0, Y))} \leq M_1; \quad (\text{A.1.11})$$

$$\|\sqrt{\alpha^\epsilon} \partial_x \Phi_N^\epsilon\|_{L^2(Q)} \leq M_1; \quad (\text{A.1.12})$$

$$\|\partial_x \Phi_N^\epsilon\|_{L^2(Q_d)} \leq M_2 \text{ pour tout } d > 0. \quad (\text{A.1.13})$$

Notons que M_2 dépend de d .

Démonstration. Les estimations (A.1.11) à (A.1.13) résulteront du lemme de Gronwal. Pour cela, nous introduisons la fonction ϕ définie sur $[0, X]$ par:

$$x \mapsto \int_0^Y [\partial_y \Phi_N^\epsilon(x, y)]^2 dy,$$

et nous établissons une majoration de la fonction ϕ .

Nous multiplions l'équation (A.1.7) par $\partial_x C_N^k(x)$, nous sommes sur les indices k tels que $1 \leq k \leq N$, et nous intégrons par rapport à x . Il vient:

$$\begin{aligned} & \int_0^x (\alpha^\epsilon \partial_x \Phi_N^\epsilon, \partial_x \Phi_N^\epsilon)_{L^2(0,Y)} dx + \int_0^x (\beta \partial_y \Phi_N^\epsilon, \partial_x \Phi_N^\epsilon)_{L^2(0,Y)} dx + \\ & \int_0^x (\partial_y \Phi_N^\epsilon, \partial_{xy}^2 \Phi_N^\epsilon)_{L^2(0,Y)} dx = \int_0^x (\alpha F, \partial_x \Phi_N^\epsilon)_{L^2(0,Y)} dx. \end{aligned} \quad (\text{A.1.14})$$

On pose

$$\begin{aligned} E_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x (\alpha^\epsilon \partial_x \Phi_N^\epsilon, \partial_x \Phi_N^\epsilon)_{L^2(0,Y)} dx; \\ E_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x (\beta \partial_y \Phi_N^\epsilon, \partial_x \Phi_N^\epsilon)_{L^2(0,Y)} dx; \\ E_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x (\partial_y \Phi_N^\epsilon, \partial_{xy}^2 \Phi_N^\epsilon)_{L^2(0,Y)} dx; \\ E_4 &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x (\alpha F, \partial_x \Phi_N^\epsilon)_{L^2(0,Y)} dx. \end{aligned}$$

L'égalité (A.1.14) s'écrit:

$$\sum_{i=1}^3 E_i = E_4. \quad (\text{A.1.15})$$

Un calcul simple montre que nous avons

$$E_1 = \int_0^x \int_0^Y \alpha^\epsilon [\partial_x \Phi_N^\epsilon]^2 dx dy;$$

$$E_3 = \frac{1}{2} \int_0^x \partial_x (\partial_y \Phi_N^\epsilon, \partial_y \Phi_N^\epsilon)_{L^2(0,Y)} dx = \frac{1}{2} \int_0^Y [\partial_y \Phi_N^\epsilon(x, y)]^2 dy.$$

Puisque $\alpha \geq 0$, nous avons pour tout $\epsilon_1 > 0$,

$$|E_4| \leq \frac{1}{2\epsilon_1} \int_0^x \int_0^Y \alpha [F]^2 dx dy + \frac{\epsilon_1}{2} \int_0^x \int_0^Y \alpha [\partial_x \Phi_N^\epsilon(x, y)]^2 dx dy.$$

Pour le dernier terme E_2 , nous avons pour tout $\epsilon_2 > 0$:

$$\begin{aligned} |E_2| &\leq \int_0^x \int_0^Y |\beta \partial_y \Phi_N^\epsilon \partial_x \Phi_N^\epsilon| dx dy \\ &\leq \frac{\epsilon_2}{2} \int_0^x \int_0^Y |\beta| [\partial_x \Phi_N^\epsilon]^2 dx dy + \frac{1}{2\epsilon_2} \int_0^x \int_0^Y |\beta| [\partial_y \Phi_N^\epsilon]^2 dx dy. \end{aligned}$$

En regroupant les estimations des E_i pour $i = 1, \dots, 3$ nous déduisons de (A.1.15) l'estimation suivante:

$$E_1 - |E_2| + E_3 \leq \sum_{i=1}^3 E_i \leq |E_4|,$$

qui s'écrit encore

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^Y (\alpha^\epsilon - \alpha \frac{\epsilon_1}{2} - |\beta| \frac{\epsilon_2}{2}) [\partial_x \Phi_N^\epsilon]^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_0^Y [\partial_y \Phi_N^\epsilon(x, y)]^2 dy &\leq \frac{1}{2\epsilon_1} \|\alpha\|_{L^\infty(Q)} \|F\|_{L^2(Q)} + \\ \frac{1}{2\epsilon_2} \|\beta\|_{L^\infty(Q)} \int_0^x \int_0^Y [\partial_y \Phi_N^\epsilon]^2 dx dy, & 0 < x \leq X. \end{aligned} \quad (\text{A.1.16})$$

Nous pouvons choisir $\epsilon_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}$, $\epsilon_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\mu_1}$ où μ_1 est défini à l'hypothèse ii) du théorème A.1.1 (donc $|\beta| \frac{\epsilon_2}{2} \leq \frac{\alpha}{4}$). Ainsi le premier terme du membre de gauche de l'inégalité (A.1.16) satisfait:

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^Y \alpha^\epsilon [\partial_x \Phi_N^\epsilon]^2 dx dy \leq \int_0^x \int_0^Y (\alpha^\epsilon - \alpha \frac{\epsilon_1}{2} - |\beta| \frac{\epsilon_2}{2}) [\partial_x \Phi_N^\epsilon]^2 dx dy. \quad (\text{A.1.17})$$

A partir des inégalités (A.1.16) et (A.1.17) nous déduisons l'inégalité:

$$\int_0^Y [\partial_y \Phi_N^\epsilon(x, y)]^2 dy \leq \|\alpha\|_{L^\infty(Q)} \|F\|_{L^2(Q)} + 2\mu_1 \|\beta\|_{L^\infty(Q)} \int_0^x \int_0^Y [\partial_y \Phi_N^\epsilon]^2 dx dy.$$

que nous récrivons encore:

$$\phi(x) \leq 2\mu_1 \|\beta\|_{L^\infty(Q)} \int_0^x \phi(s) ds + \|\alpha\|_{L^\infty(Q)} \|F\|_{L^2(Q)}$$

Le lemme de Gronwall (voir lemme 1 p. 672 vol 3 [10]) s'applique à la fonction ϕ et fournit:

$$\begin{aligned} \phi(x) &\leq 2\mu_1 \|\beta\|_{L^\infty(Q)} \int_0^x \phi(s) ds + \|\alpha\|_{L^\infty(Q)} \|F\|_{L^2(Q)} \leq \\ &\|\alpha\|_{L^\infty(Q)} \|F\|_{L^2(Q)} \exp(2\mu_1 \|\beta\|_{L^\infty(Q)} X), \forall x \in (0, X). \end{aligned} \quad (\text{A.1.18})$$

Si on définit la constante M_1 par:

$$M_1 = \sqrt{\|\alpha\|_{L^\infty(Q)} \|F\|_{L^2(Q)} \exp(2\mu_1 \|\beta\|_{L^\infty(Q)} X)}$$

l'estimation (A.1.11), se déduit de (A.1.18). Il est immédiat de vérifier que M_1 ne dépend ni de ϵ ni de N .

L'estimation (A.1.12) est une conséquence de (A.1.16) et de (A.1.18).

L'estimation (A.1.13) quant à elle est une conséquence des inégalités (A.1.16), (A.1.17), (A.1.18) et de l'hypothèse i) du théorème A.1.1. Le lemme A.1.2 est démontré.

□

Etape 4, passage à la limite

Nous utilisons les arguments classiques de compacité séquentielle de la boule unité dans les espaces de Banach séparables (voir par exemple [10], vol. 3 p. 605), associés au procédé d'extraction diagonal pour définir une sous-suite de Φ_N^ϵ , que l'on notera encore Φ_N^ϵ (on peut choisir par exemple $\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N}$). Nous avons le résultat suivant:

Lemme A.1.3. Soit Φ_N^ϵ la suite de fonctions solutions du problème (A.1.7),(A.1.8) définie par le lemme A.1.1. Alors il existe $\Phi \in L^2(0, X; H_0^1(0, Y))$ telle que $\sqrt{\alpha} \partial_x \Phi \in L^2(Q)$ et telle que $\partial_x \Phi \in L^2(Q_d)$ pour tout $d > 0$, et il existe une sous-suite extraite de la suite Φ_N^ϵ , encore notée Φ_N^ϵ , satisfaisant:

$$\begin{aligned} \Phi_N^\epsilon &\rightharpoonup \Phi \text{ dans } L^2(0, X; H^1(0, Y)) \text{ faible} \\ &\text{et dans } L^\infty(0, X; H^1(0, Y)) \text{ faible étoile;} \end{aligned} \quad (\text{A.1.19})$$

$$\Phi_N^\epsilon \rightharpoonup \Phi \text{ dans } H^1(Q_d) \text{ faible pour tout } d > 0; \quad (\text{A.1.20})$$

$$\sqrt{\alpha^\epsilon} \partial_x \Phi_N^\epsilon \rightharpoonup \sqrt{\alpha} \partial_x \Phi \text{ dans } L^2(Q) \text{ faible.} \quad (\text{A.1.21})$$

Démonstration. Le résultat de convergence (A.1.19) est une conséquence de l'estimation (A.1.11), de la compacité séquentielle de la boule unité d'un espace de Banach séparable rappelée à la section 4.4 et de l'unicité de la limite d'une suite convergente dans $\mathcal{D}'(Q)$. De même, les estimations (A.1.12) et (A.1.13) impliquent que:

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha^\epsilon} \partial_x \Phi_N^\epsilon &\rightharpoonup \gamma_1 \text{ dans } L^2(Q) \text{ faible;} \\ \partial_x \Phi_N^\epsilon &\rightharpoonup \gamma_2 \text{ dans } L^2(Q_d) \text{ faible pour tout } d > 0. \end{aligned}$$

L'opérateur de dérivation étant continu dans $\mathcal{D}'(Q)$, nous avons que:

$$\partial_x \Phi_N^\epsilon \rightharpoonup \partial_x \Phi \text{ dans } \mathcal{D}'(Q) \text{ et aussi dans } \mathcal{D}'(Q_d) \text{ pour tout } d > 0.$$

Nous en déduisons par unicité de la limite dans \mathcal{D}' que: $\gamma_2 = \partial_x \Phi$.

Montrons que

$$\sqrt{\alpha^\epsilon} \partial_x \Phi_N^\epsilon \rightharpoonup \sqrt{\alpha} \partial_x \Phi \text{ dans } \mathcal{D}'(Q).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$, nous désignons par K le sous-ensemble compact de Q tel que: $K \stackrel{\text{def}}{=} \text{supp } \varphi$. D'une part nous avons:

$$\int_K \sqrt{\alpha^\epsilon} \partial_x \Phi_N^\epsilon \varphi \, dx dy \longrightarrow \int_K \gamma_1 \varphi \, dx dy.$$

D'autre part, nous vérifions aisément que:

$$0 \leq \sqrt{\alpha^\epsilon} - \sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha + \epsilon} - \sqrt{\alpha} = \frac{\epsilon}{\sqrt{\alpha + \epsilon} + \sqrt{\alpha}} \leq \sqrt{\epsilon};$$

ce qui permet de déduire que:

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha^\epsilon} \varphi &\longrightarrow \sqrt{\alpha} \varphi \text{ dans } L^2(Q); \text{ ainsi que} \\ \int_K \sqrt{\alpha^\epsilon} \partial_x \Phi_N^\epsilon \varphi \, dx dy &\longrightarrow \sqrt{\alpha} \partial_x \Phi(\varphi) = \int_K \sqrt{\alpha} \partial_x \Phi \varphi \, dx dy. \end{aligned}$$

La convergence faible de $\sqrt{\alpha^\epsilon} \partial_x \Phi_N^\epsilon$ vers γ_1 dans $L^2(Q)$ permet d'affirmer que $\gamma_1 = \sqrt{\alpha} \partial_x \Phi$. Le lemme A.1.3 est démontré.

□

démonstration du théorème A.1.1. Le théorème A.1.1 sera démontré si nous vérifions que la fonction $\Phi \in L^2(0, X; H_0^1(0, Y))$ telle que $\sqrt{\alpha} \partial_x \Phi \in L^2(Q)$ et telle que $\partial_x \Phi \in L^2(Q_d)$ pour tout $d > 0$ dont l'existence a été établie au lemme A.1.3 est une solution du problème (A.1.1),(A.1.2). C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme A.1.4. Soit $\{\Phi_N^\epsilon\}$ la suite de fonctions solutions du problème (A.1.7), (A.1.8) définie par le lemme A.1.1, et soit $\Phi \in L^2(0, X; H_0^1(0, Y))$ telle que $\sqrt{\alpha} \partial_x \Phi \in L^2(Q)$ et telle que $\partial_x \Phi \in L^2(Q_d)$ pour tout $d > 0$ la fonction limite d'une sous-suite extraite de $\{\Phi_N^\epsilon\}$ dont l'existence a été établie au lemme A.1.3. Alors Φ est une solution du problème (A.1.1), (A.1.2).

Démonstration. Soit une famille $\{g_j\}_{j \geq 1}$ de fonctions définies sur $[0, X]$, régulières telles que l'ensemble S défini par :

$S \stackrel{\text{def}}{=} \{\{W_n^m\}_{n \geq 1, m \geq 1} \text{ où } W_n^m \text{ est défini par}$

$$W_n^m(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{jk} g_j(x) \varphi_k(y), \quad \forall (x, y) \in Q \text{ avec } a_{jk} \in \mathbb{R}\}$$

soit dense dans l'espace $L^2(0, X; H_0^1(0, Y))$. Nous multiplions l'équation (A.1.7) par g_j et nous sommions sur tous les indices $j \leq m$ et $k \leq n$ où $n \leq N$. Intégrant par rapport à x , il vient :

$$\begin{aligned} & \int_0^X (\sqrt{\alpha^\epsilon} \partial_x \Phi_N^\epsilon, \sqrt{\alpha^\epsilon} W_n^m)_{L^2(0, Y)} dx + \int_0^X (\beta \partial_y \Phi_N^\epsilon, W_n^m)_{L^2(0, Y)} dx + \\ & \int_0^X (\partial_y \Phi_N^\epsilon, \partial_y W_n^m)_{L^2(0, Y)} dx = \int_0^X (\alpha F, W_n^m)_{L^2(0, Y)} dx \quad \forall W_n^m \in S. \end{aligned}$$

Prenant la limite dans l'égalité précédente lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ et $N \rightarrow \infty$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_0^X (\sqrt{\alpha} \partial_x \Phi, \sqrt{\alpha} W_n^m)_{L^2(0, Y)} dx + \int_0^X (\beta \partial_y \Phi, W_n^m)_{L^2(0, Y)} dx + \\ & \int_0^X (\partial_y \Phi, \partial_y W_n^m)_{L^2(0, Y)} dx = \int_0^X (\alpha F, W_n^m)_{L^2(0, Y)} dx \quad \forall W_n^m \in S. \end{aligned} \quad (\text{A.1.22})$$

La densité de S dans $L^2(0, X; H_0^1(0, Y))$ permet de prolonger la relation (A.1.22) pour tous les $\varphi \in L^2(0, X; H_0^1(0, Y))$, qui alors n'est rien d'autre que la relation (A.1.1). On a :

$$\begin{aligned} & \int_Q \{\alpha \partial_x \phi + \beta \partial_y \phi\} \psi \, dx dy + \int_Q \partial_y \phi \partial_y \psi \, dx dy = \int_Q \alpha F \psi \, dx dy \\ & \text{pour tout } \psi \in L^2(0, X; H_0^1(0, Y)). \end{aligned} \quad (\text{A.1.23})$$

Intéressons nous à la relation (A.1.2) maintenant. D'après le lemme A.1.3 nous savons que :

$$\Phi_N^\epsilon \rightharpoonup \Phi \text{ dans } H^1(Q_d) \text{ faible pour tout } d > 0.$$

Pour tout $d > 0$, en remplaçant Q par Q_d et $(0, Y)$ par (d, Y) dans l'énoncé du lemme 4.2.3 nous obtenons l'existence d'une application linéaire γ_0^ϵ continue de $H^1(Q_d)$ dans $L^2((d, Y))$. L'application étant linéaire, elle est continue lorsque $H^1(Q_d)$ et $L^2((d, Y))$ sont munis de

leur topologie faible (voir théorème 3.9 p. 39 de Brezis [5]).

On en déduit:

$\Phi_N^{\epsilon}(0, \cdot) \rightharpoonup \Phi(0, \cdot)$ faiblement dans $L^2(d, Y)$ pour tout $d > 0$ lorsque $N \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 0$.

La relation suivante:

$$\Phi(0, y) = 0 \text{ dans } L^2(d, Y)$$

est donc satisfaite pour tout $d > 0$, ce qui n'est rien d'autre que la relation (A.1.2). Le lemme A.1.4 est démontrée.

□

Utilisant la propriété $\mathcal{D}(Q) \subset L^2(0, X; H_0^1(0, Y))$, nous déduisons de la relation (A.1.23) que:

$$\alpha \partial_x \phi + \beta \partial_y \phi - \partial_{yy}^2 \phi = \alpha F \text{ dans } \mathcal{D}'(Q).$$

Les propriétés $\alpha, \beta \in L^\infty(Q)$; $\sqrt{\alpha} \partial_x \Phi \in L^2(Q)$; $F \in L^2(Q)$ entraînent que $\Phi \in L^2(0, X; H^2(0, Y))$. Le théorème A.1.1 est démontré.

□

REFERENCES

1. Anderson, J.D., *Hypersonic and high temperature gas dynamics, series in aeronautical and aerospace engineering*, Mc Graw-Hill, 1989.
2. Aupoix A., Cousteix J., *Calculation of hypersonic laminar boundary layer.*, First joint Europe-US short course on hypersonics (1987), E.S.A Paris.
3. Berman A., Plemmons R.J., *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Academic Press, New-York, 1979.
4. Boillat E., Pousin J., *A numerical investigation of two-dimensional reactive boundary layer equations*, Proc. 5th Intern. Symp. on Numerical Methods in Engineering Eds R. Gruber, J. Périaux, R.P. Shaw (1989), Comp. Mechanics Pub. Springer-Verlag.
5. Brezis H., *Analyse fonctionnelle et application.*, Masson, Paris, 1983.
6. Caussignac P., Touzani R., *Solution of three-dimensional boundary layer equations by a discontinuous finite element method, part 1: numerical analysis of a linear model problem.*, Comp. Meth. in appl. Mech. and Eng. 78 (1990), 249-271.
7. Caussignac P., Touzani R., *Solution of three-dimensional boundary layer equations by a discontinuous finite element method, part 2: implementation and numerical results.*, Comp. Meth. in appl. Mech. and Eng. 79 (1990), 1-20.
8. Ciarlet P. G., *The finite element method for elliptic problems.*, North Holland, Amsterdam, 1978.
9. Coddington E. A., Levinston N., *Theory of ordinary differential equations.*, Mac Graw Hill, 1955.
10. Dautray R., Lions J. L., *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques.*, Masson, Paris, 1986.
11. Edder O., *Calcul de la couche limite par la méthode des éléments finis discontinus*, Rapport Dépt. Math. EPFL Lausanne (1987).
12. Edelm C., *Couches limites hypersoniques avec effet de dissociation* (1987), Thèse de l'école nationale sup. de l'aéronautique et de l'espace, Toulouse.
13. Ladyzenskaya, Solonnikov, Uralceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type.*, vol. 23, Trans. of Math. monographs, Rhode Island, 1968.
14. Lions J. L., *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires.*, Dunod Gauthier Villars, Paris, 1969.

15. Lesaint P., Pousin J., *Existence and approximation results for thermal boundary layer equations of reactive flows*, SIAM J. Numer. Anal. **28** (1991), 1030-1046.
16. Oleinik O.A., *The Prandtl system of equations in boundary layer theory*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR Soviet Math. **159** (1963), 583-586.
17. ———, *Mathematical problems of boundary layer theory*, Lecture Notes of university of Minnesota, University of Minnesota Minneapolis.
18. Raviart P. A., *Sur la résolution de certaines équations paraboliques non linéaires.*, Journal of functional Analysis **5** (1970), 299-328.
19. Rudin W. A., *Analyse réelle et complexe.*, Masson, Paris, 1977.
20. Walter W., *Existence and convergence theorems for the boundary layer equations based on the line method.*, Arch. Ratio. Mech. Anal. **39** (1970), 169-188.

CHAPITRE 5

Comportement asymptotique des fractions massiques au voisinage du corps

Résumé. Soit un écoulement de fluide réactif au dessus d'une plaque plane. Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'étudier le comportement asymptotique des fractions massiques des espèces chimiques constituant le fluide dans un voisinage de la plaque. Néanmoins nous nous restreindrons au cas où la diffusion des espèces peut être négligée, et où la vitesse, la température et la pression sont données. Une telle situation apparaît lorsque l'on étudie numériquement cet écoulement, dans le cadre de la couche limite, à l'aide d'une méthode de marche par exemple (cf chapitre 6). La connaissance de ce comportement asymptotique au voisinage du corps est aussi intéressante d'un point de vue numérique pratique dans le cas où la diffusion des espèces n'est pas négligée. En effet, une stratégie possible est de dissocier la convection de la diffusion et il est alors intéressant de connaître le comportement au voisinage du corps (cf [3]). Le résultat qui est obtenu dans ce chapitre est celui prédit par la physique; la vitesse s'annule sur le corps, donc les fractions massiques sur le corps annulent le taux de production des espèces, aussi, ce sont les fractions massiques de l'équilibre chimique. Ce résultat est trivial si on suppose que les fractions massiques sont des solutions régulières des équations de conservation de la masse des différentes espèces chimiques, mais en l'absence de diffusion des espèces il n'est pas loisible de considérer une telle hypothèse de régularité. Nous considérons donc des solutions faibles des équations de conservation de la masse des différentes espèces chimiques et nous établissons ce résultat pour ces solutions faibles. Mentionnons que ce résultat a déjà été présenté dans Boillat-Pousin [1].

5.1. Introduction.

Par souci de simplicité, dans ce qui suit, nous considérerons le cas d'un écoulement de fluide réactif (voir figure 1) au dessus d'une plaque plane; le fluide réactif est de l'air constitué de cinq espèces chimiques, N, O, N_2, O_2, NO , et nous supposons que les hypothèses HP1 à HP3 du chapitre 2 sont satisfaites. Nous supposons que les vitesses de diffusion des espèces sont négligeables. Soit $\alpha > 0$, nous noterons Θ le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 , $(-\alpha, 1+\alpha) \times [0, 1+\alpha)$ dans lequel la couche limite apparaît, et nous noterons Q le domaine $(0, 1) \times (0, 1)$. Σ_- , la partie "éclairée" de la frontière de Q est définie par:

$$\Sigma_- = \{\bar{x} = (0, s)^T, 0 < s \leq 1\} \cup \{\bar{x} = (s, 1)^T, 0 \leq s < 1\}$$

où le symbole T désigne la transposition. Nous noterons \vec{Y} le vecteur de \mathbb{R}^5 dont les composantes sont les fractions massiques des espèces, \vec{V} la vitesse du fluide, T la température et P la pression. Le problème \mathcal{P} que nous considérons peut alors se formuler par: pour $\vec{V} = (v_1, v_2)^T$, T , et P des fonctions réelles définies sur Θ données, et pour \vec{Y}_e une fonction à valeurs dans $[\mathbb{R}_+^5]$ donnée,

trouver $\vec{Y}: \bar{Q} \rightarrow (0, 1)^5$ solution de:

$$\vec{V}(\bar{x})^T \nabla \vec{Y}(\bar{x}) = \vec{\Omega}(T(\bar{x}), P(\bar{x}), \vec{Y}(\bar{x})) \quad \text{pour } \bar{x} = (x_1, x_2)^T \text{ dans } Q; \quad (5.1.1)$$

$$\vec{Y}(\bar{x}_0) = \vec{Y}_e(\bar{x}_0) \quad \text{pour } \bar{x}_0 \text{ dans } \Sigma_-, \quad (5.1.2)$$

et préciser le comportement de $\vec{Y}(x_1, x_2)$ lorsque x_2 s'annule $\forall x_1 > 0$.

L'équation (5.1.1) est l'équation de continuité pour chaque espèce chimique où $\vec{\Omega}$ représente le taux de production massique des espèces qui a été défini au chapitre 2 en (2.0.36). Pour s'assurer de cela considérons l'équation (1.1.3) dans laquelle on utilise l'expression (2.0.37) du terme de production ω_k . Si on annule la vitesse de diffusion \tilde{v}_k pour $1 \leq k \leq 5$ et si on exprime $\frac{\tilde{p}}{\sum_{k=1}^5 \rho_k}$ comme une fonction de \vec{Y} , ($\vec{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{p}}{\sum_{k=1}^5 \rho_k}$), en notant $\vec{\Omega}(T, P, \vec{Y})$ pour $\vec{\Omega}^z(T, P, \frac{\tilde{p}}{\sum_{k=1}^5 \rho_k})$ on obtient l'équation (5.1.1).

Pour étudier l'existence, l'unicité et le comportement asymptotique des solutions \vec{Y} du problème (5.1.1), (5.1.2), nous utiliserons la méthode des caractéristiques. Ainsi sur chaque courbe caractéristique, le problème du comportement asymptotique se réduira à une étude de stabilité à l'infini pour une équation différentielle ordinaire. L'aspect dynamique du problème (équation aux dérivées partielles) n'apparaît plus, et les propriétés de $\vec{\Omega}$ reliant la fonction d'enthalpie libre, les potentiels chimiques et $\vec{\Omega}$ (voir hypothèse HP5 v)) nous permettront de construire une fonction de Lyapounov (l'enthalpie libre), technique classique pour traiter ce type de problème.

L'organisation de ce chapitre sera la suivante: la fin de cette section est consacrée aux hypothèses que nous faisons sur la température T , la pression P , la vitesse \vec{V} et la fonction $\vec{\Omega}$. A la section 2, nous étudions les courbes caractéristiques associées au champ \vec{V} et nous

donnons un résultat d'existence de solutions au problème (5.1.1), (5.1.2) en un certain sens. A la section 3 nous étudions la stabilité "à l'infini" des équations différentielles représentant l'équation (5.1.1) sur les courbes caractéristiques et nous en déduisons que les fractions massiques tendent vers leur valeur d'équilibre lorsque l'on s'approche du corps.

Concernant les champs de température T , de pression P et de vitesse \vec{V} , nous supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites:

HP1 $T, P \in C^1(\Theta; \mathbf{R}_+^*)$ et leurs dérivées sont bornées sur Θ ;

HP2 $\vec{V} \in C^1(\Theta; \mathbf{R}^2)$ et ses dérivées sont bornées sur Θ .

De plus, nous supposons que \vec{V} s'annule sur la partie Σ_0 du bord de Q définie par:

$$\Sigma_0 = \{\bar{x} = (x_1, 0)^T \text{ tels que } x_1 \in [0, 1]\};$$

et que les signes des composantes horizontales et verticales de la vitesse \vec{V} sont fixés partout dans \bar{Q} . De façon plus précise nous supposons:

HP3 il existe $p, p \geq 1$ et $u(\bar{x}) \in C^1(\Theta; \mathbf{R}_+^*)$ dont les dérivées sont bornées sur Θ tels que: $v_1(\bar{x}) = x_2^p u(\bar{x})$;

HP4 il existe $d \geq 1$ et $v(\bar{x}) \in C^1(\Theta; \mathbf{R}_+^*)$ dont les dérivées sont bornées sur Θ tels que: $v_2(\bar{x}) = -x_2^{p+d} v(\bar{x})$.

Remarque:

Si $d < 1$ l'équation de continuité (1.4.13) qui peut s'écrire:

$$\vec{V}^T \nabla \log \rho = -\text{div} \vec{V} \quad (5.1.3)$$

impliquerait que la fonction ρ représentant la densité a un gradient non borné dans un voisinage de Σ_0 ce qui n'est physiquement pas admissible.

Concernant la fonction $\bar{\Omega}$ nous supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites.

HP5 i) $\bar{\Omega}(T, P, \vec{M}) \in C^1((\mathbf{R}_+^*)^2 \times [\mathbf{R}_+^5 \setminus \vec{0}]; \mathbf{R}^5)$;

ii) $\forall (T, P, \vec{M}) \in (\mathbf{R}_+^*)^2 \times [\mathbf{R}_+^5 \setminus \vec{0}]$ tel que $M_i = 0$ on a: $\Omega_i(T, P, \vec{M}) > 0$ pour tout $i, 1 \leq i \leq 5$.

iii) Il existe A une 2×5 matrice à coefficients non négatifs telle que $\sum_{i=1}^2 A_{ij} = 1$ pour tout $j, 1 \leq j \leq 5$ et telle que $\bar{\Omega}(T, P, \vec{M}) \in \text{Ker } A, \forall (T, P, \vec{M}) \in (\mathbf{R}_+^*)^2 \times [\mathbf{R}_+^5 \setminus \vec{0}]$.

iiii) Il existe une fonction $g^Z(T, P, \vec{M}) \in C^1([\mathbf{R}_+^*]^2 \times [\mathbf{R}_+^5; \mathbf{R}] \cap C^0([\mathbf{R}_+^*]^2 \times [\mathbf{R}_+^5 \setminus \vec{0}]; \mathbf{R})$ et il existe $\vec{C}^Z(T, P, A\vec{M}) \in C^1([\mathbf{R}_+^*]^2 \times [\mathbf{R}_+^*]^2; [\mathbf{R}_+^*]^5)$ qui réalise le minimum suivant:

$$g^Z(T, P, \vec{C}^Z(T, P, A\vec{M})) = \min_{\substack{\vec{M}' \in \mathbf{R}_+^5 \setminus \vec{0} \\ A\vec{M}' = A\vec{M}}} g^Z(T, P, \vec{M}').$$

De plus si on définit les composantes du vecteur $\vec{\mu}^*$ par $\mu_k^*(T, P, \vec{M}) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial g^Z(T, P, \vec{M})}{\partial M_k}$ pour $1 \leq k \leq 5$ on a $\vec{\mu}^*(T, P, \vec{C}^Z(T, P, A\vec{M})) \in \{\text{Ker } A\}^\perp$ (l'orthogonal du noyau de A).

- v) Soit F un fermé de $(\mathbb{R}_+^*)^2$, pour tout sous-ensemble compact B de $F \times (\mathbb{R}_+^*)^2$, il existe une constante $k(B) > 0$ telle que:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}(T, P, \vec{M})^\top \bar{\mu}^z(T, P, \vec{M}) &\leq -k(B) [g^z(T, P, \vec{M}) - g^z(T, P, \vec{C}^z(T, P, A^z \vec{M}))] \\ \forall (T, P, \vec{M}) &\in F \times (\mathbb{R}_+^*)^5 \text{ avec } (T, P, A^z \vec{M}) \in B. \end{aligned}$$

Remarque:

Nous avons démontré au chapitre 2 que les hypothèses HP5 étaient satisfaites dans le cas de l'air pour autant que les hypothèses HP1 à HP3 du chapitre 2 soient satisfaites. Pour HP5 i) et iii) voir le lemme 2.3.3, pour HP5 ii) voir le lemme 2.3.4, pour HP5 iiiii) voir les lemmes 2.2.1, 2.3.1 et 2.3.2, et pour HP5 v) voir le théorème 2.4.1.

5.2. Existence et unicité de solution au problème \mathcal{P} .

Dans cette section, nous montrons l'existence de courbes caractéristiques associées au vecteur \bar{V} et nous donnons une estimation du paramètre servant à décrire les courbes caractéristiques lorsque celles-ci s'approche de Σ_0 . Nous donnons la définition d'une solution faible pour le problème \mathcal{P} , puis nous montrons l'existence et l'unicité d'une solution faible pour le problème \mathcal{P} .

Commençons par énoncer un résultat d'existence et d'unicité pour un système d'équations différentielles ordinaires.

D'abord nous introduisons $\theta : \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction indéfiniment différentiable telle que $\theta = 1$ dans \bar{Q} et telle que $\theta = 0$ dans le complémentaire de Θ . On peut prolonger la fonction \bar{V} à $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ en la multipliant par θ et on notera encore par \bar{V} ce prolongement. D'après l'hypothèse HP2 la fonction prolongée \bar{V} est de classe C^1 et est bornée ainsi que ses dérivées.

Soit $\bar{x} \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ donné, on cherche une fonction

$$\begin{aligned} \bar{X}(\bar{x}, \cdot) : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \\ \tau &\mapsto \bar{X}(\bar{x}, \tau) = (X_1(\bar{x}, \tau), X_2(\bar{x}, \tau))^T \end{aligned}$$

de classe C^1 et vérifiant:

$$\frac{d}{d\tau} \bar{X}(\bar{x}, \tau) = \bar{V}(\bar{X}(\bar{x}, \tau)); \quad (5.2.1)$$

$$\bar{X}(\bar{x}, 0) = \bar{x}. \quad (5.2.2)$$

Avant d'énoncer un résultat classique d'existence et d'unicité pour le problème (5.2.1), (5.2.2), introduisons quelques notations.

Soit $\bar{x} \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ donné on définit la courbe $\gamma(\bar{x})$ par:

$$\gamma(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{y} \mid \bar{y} = \bar{X}(\bar{x}, \tau) \text{ pour } \tau \in \mathbf{R} \text{ où } \bar{X}(\bar{x}, \cdot) \text{ est solution de (5.2.1), (5.2.2)}\}.$$

Soit $\bar{a} = (0, 1)^T$, on définit les sous-domaines de Q , Q_+ et Q_- par:

$$Q_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x} \in Q \mid x_1 = y_1, x_2 > y_2 \text{ où } \bar{y} \in \gamma(\bar{a})\};$$

$$Q_- \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x} \in Q \mid x_1 = y_1, x_2 < y_2 \text{ où } \bar{y} \in \gamma(\bar{a})\}.$$

Nous désignerons par m , respectivement M en indice d'une fonction, son minimum, respectivement son maximum sur \bar{Q} :

$$f_m = \min_{\bar{z} \in \bar{Q}} f(\bar{z}); \quad f_M = \max_{\bar{z} \in \bar{Q}} f(\bar{z}).$$

Lemme 5.2.1. Supposons que les hypothèses HP2 à HP4 sont satisfaites. Alors:

a) $\forall \vec{x} \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ il existe une unique fonction $\vec{X}(\vec{x}, \cdot) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ de classe C^1 vérifiant les équations (5.2.1), (5.2.2).

b) Pour tout $\vec{x} \in Q \cup \Sigma_-$, il existe un intervalle compact $I(\vec{x})$, défini par: $I(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} [tp(\vec{x}), ts(\vec{x})]$ tel que $0 \in [tp(\vec{x}), ts(\vec{x})]$ et tel que $\vec{X}(\vec{x}, \cdot) : I(\vec{x}) \rightarrow \bar{Q}$ avec $\vec{X}(\vec{x}, tp(\vec{x})) \in \Sigma_-$.

c) Les fonctions tp et $ts : Q \cup \Sigma_- \rightarrow \mathbf{R}$ sont continues et on a pour tout x_1 tel que $0 < x_1 < 1$

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} tp(x_1, x_2) = -\infty.$$

d) Si $D \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{\vec{x} \in Q} \{\vec{x}\} \times (tp(\vec{x}), ts(\vec{x}))$ alors la fonction

$$\begin{aligned} \vec{X} : D &\rightarrow Q \\ (\vec{x}, \tau) &\mapsto \vec{X}(\vec{x}, \tau) \end{aligned}$$

est continue.

Démonstration. a) L'hypothèse HP2 implique que la fonction (prolongée) \vec{V} est Lipchitzienne et bornée dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$.

Considérons le cas d'un $\vec{x} \in Q$, les autres cas ($\vec{x} \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \setminus Q$) se traitant avec les mêmes arguments.

D'après le théorème 1.8.3 p. 122 de Cartan [2] on a l'existence d'un plus grand intervalle $I(\vec{x})$ tel que 0 appartienne à l'intérieur de $I(\vec{x})$ et on a l'existence d'une unique fonction $\vec{X}(\vec{x}, \cdot) : I(\vec{x}) \rightarrow \bar{Q}$ de classe C^1 et vérifiant les équations (5.2.1), (5.2.2).

Montrons l'existence de $tp(\vec{x})$ et de $ts(\vec{x})$ tels que $I(\vec{x}) = [tp(\vec{x}), ts(\vec{x})]$, et pour cela commençons par montrer que $I(\vec{x})$ est fermé.

Supposons que $I(\vec{x})$ soit semi-ouvert, c'est-à-dire $I(\vec{x}) = [a, b)$. Soit $\{\tau_n\}$ une suite d'éléments de $[a, b)$ telle que τ_n tend vers b lorsque n tend vers l'infini. La suite $\{\tau_n\}$ est une suite de Cauchy. En intégrant l'équation (5.2.1), il est immédiat de vérifier que $\{\vec{X}_n = \vec{X}(\vec{x}, \tau_n)\}$ est une suite de Cauchy puisque \vec{V} est bornée. Il existe donc $\vec{X}_b \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow b \\ \tau < b}} \vec{X}(\vec{x}, \tau) = \vec{X}_b.$$

Ainsi tant que $\vec{X}_b \in Q$ on peut prolonger la fonction $\vec{X}(\vec{x}, \cdot)$ à un intervalle $[a, b_1]$ avec $b_1 > b$. Raisonnant de même pour les autres cas ($I(\vec{x})$ ouvert ou semi-ouvert à gauche) on en déduit que $I(\vec{x})$ est un intervalle fermé.

Montrons que $I(\vec{x}) \neq \mathbf{R}$ si on impose $\vec{X}(\vec{x}, \tau) \in \bar{Q}$ (et que $I(\vec{x}) = \mathbf{R}$ si on impose $\vec{X}(\vec{x}, \tau) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$), c'est-à-dire qu'il existe $tp(\vec{x})$ et $ts(\vec{x})$ appartenant à \mathbf{R} tels que $I(\vec{x}) = [tp(\vec{x}), ts(\vec{x})]$

et tels que:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\tau \rightarrow tp(\bar{x}) \\ \tau > tp(\bar{x})}} \bar{X}(\bar{x}, tp(\bar{x})) &\in \Sigma_-; \\ \lim_{\substack{\tau \rightarrow ts(\bar{x}) \\ \tau < ts(\bar{x})}} \bar{X}(\bar{x}, ts(\bar{x})) &= \bar{X}_s; \text{ avec } X_{s_1} = 1, X_{s_2} > 0. \end{aligned}$$

En montrant que X_1 et X_2 vérifient des inéquations différentielles nous allons estimer X_1 et X_2 . Soit \mathcal{F} la fonction définie par:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : (0, +\infty) &\longrightarrow \mathbf{R}, \\ t &\mapsto \mathcal{F}(t) = \int_1^t \frac{ds}{s^{\frac{1}{p+d}-1}}. \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que \mathcal{F} est croissante et bijective. De la propriété $d \geq 1$ nous déduisons que:

$$\mathcal{F}(t) \geq \log(t) \quad \forall t \geq 1; \quad \mathcal{F}(t) \leq \log(t) \quad \forall t \leq 1.$$

La croissance de \mathcal{F} permet alors d'inverser \mathcal{F} , et on déduit des deux inégalités précédentes que:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \mathcal{F}^{-1}(z) = 0; \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{F}^{-1}(z) = \infty, \text{ et } \mathcal{F}^{-1}(0) = 1.$$

Des hypothèses HP3, HP4, et de (5.2.1), (5.2.2) nous déduisons les inéquations suivantes pour $\bar{X}(\bar{x}, \cdot)$:

$$[X_2(\bar{x}, \tau)]^p u_m \leq \frac{d}{d\tau} X_1(\bar{x}, \tau) \leq [X_2(\bar{x}, \tau)]^p u_M \quad \forall \tau \in I(\bar{x}); \quad (5.2.3)$$

$$-[X_2(\bar{x}, \tau)]^{p+d} v_m \leq \frac{d}{d\tau} X_2(\bar{x}, \tau) \leq -[X_2(\bar{x}, \tau)]^{p+d} v_M \quad \forall \tau \in I(\bar{x}). \quad (5.2.4)$$

où l'indice m , respectivement M désigne le minimum, respectivement le maximum de la fonction sur \bar{Q} . On pose $q = p + d - 1$, en intégrant (5.2.4) de 0 à $\tau \geq 0$ on a:

$$\frac{x_2}{\sqrt[p+d]{1 + q v_M x_2^q \tau}} \leq X_2(\bar{x}, \tau) \leq \frac{x_2}{\sqrt[p+d]{1 + q v_m x_2^q \tau}} \quad \forall \tau \geq 0. \quad (5.2.5)$$

Combinant (5.2.5) et (5.2.3) et intégrant de 0 à $\tau \geq 0$ il vient:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2^{1-d} \frac{u_m}{q v_M} \mathcal{F}(1 + q v_M x_2^q \tau) &\leq X_1(\bar{x}, \tau) \leq \\ &x_1 + x_2^{1-d} \frac{u_M}{q v_m} \mathcal{F}(1 + q v_m x_2^q \tau) \quad \forall \tau \geq 0. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

De même en intégrant l'équation (5.2.4) de τ à 0 pour $\tau \leq 0$, on a:

$$\frac{x_2}{\sqrt[p+d]{1 - q v_m x_2^q (-\tau)}} \leq X_2(\bar{x}, \tau) \leq \frac{x_2}{\sqrt[p+d]{1 - q v_M x_2^q (-\tau)}} \quad \forall \tau \leq 0. \quad (5.2.7)$$

Combinant (5.2.3) et (5.2.7) et intégrant de τ à $0 \geq \tau$ il vient:

$$x_1 + x_2^{1-d} \frac{u_M}{qv_M} \mathcal{F}(1 - qv_M x_2^q(-\tau)) \leq X_1(\vec{x}, \tau) \leq x_1 + x_2^{1-d} \frac{u_m}{qv_m} \mathcal{F}(1 - qv_m x_2^q(-\tau)) \quad \forall \tau \leq 0. \quad (5.2.8)$$

On pose $a \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{1}{x_2^q qv_m}$, de la minoration (5.2.7) pour $X_2(\vec{x}, \tau)$ on déduit que

$$\lim_{\tau \rightarrow a} X_2(\vec{x}, \tau) = +\infty. \quad (5.2.9)$$

Du comportement de \mathcal{F} en 0, de la majoration (5.2.8) pour $X_1(\vec{x}, \tau)$ et de la propriété $x_2 > 0$ on déduit que:

$$\lim_{\tau > a} X_1(\vec{x}, \tau) = -\infty. \quad (5.2.10)$$

Le domaine Q est borné, la fonction $\vec{X}(\vec{x}, \cdot)$ est continue, les assertions (5.2.9) et (5.2.10) impliquent qu'il existe $tp(\vec{x})$, $a < tp(\vec{x}) < 0$ tel que la borne inférieure de $I(\vec{x})$ égale $tp(\vec{x})$ et tel que $\vec{X}(\vec{x}, tp(\vec{x})) \in \Sigma_-$.

Du comportement de \mathcal{F} en $+\infty$, de la minoration (5.2.6) pour $X_1(\vec{x}, \tau)$ et de la propriété $x_2 > 0$ on déduit que:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} X_1(\vec{x}, \tau) = +\infty.$$

Le domaine Q est borné, la fonction $\vec{X}(\vec{x}, \cdot)$ est continue, on en déduit donc l'existence de $ts(\vec{x})$ tel que

$$0 < ts(\vec{x}) < +\infty, \text{ et tel que } X_1(\vec{x}, ts(\vec{x})) = 1. \quad (5.2.11)$$

Remarquons que d'après l'estimation (5.2.5) on a:

$$0 < \frac{x_2}{\sqrt{1 + qv_M x_2 \tau}} \leq X_2(\vec{x}, \tau) \quad \forall \tau \geq 0, \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*. \quad (5.2.12)$$

Dans le cas où l'on impose $\vec{X}(\vec{x}, \tau) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$, en posant $u_m = v_m = 0$ dans (5.2.3) et (5.2.4) on déduit des estimations (5.2.5) et (5.2.7) (avec $v_m = 0$) l'existence de $\vec{X}(\vec{x}, \cdot) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ puisque \vec{V} est bornée sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$. Ce qui prouve les items a) et b).

c) Montrons maintenant que la fonction $tp : Q_{\pm} \cup \gamma(\vec{a}) \cap Q \rightarrow \mathbf{R}$ est continue, la continuité de la fonction $ts : Q_{\pm} \cup \gamma(\vec{a}) \cap Q \rightarrow \mathbf{R}$ se montrant à l'aide d'arguments similaires.

De l'unicité des solutions au problème (5.2.1), (5.2.2) on déduit que deux courbes $\gamma(\vec{x})$, $\gamma(\vec{y})$ distinctes ne se coupent pas. Ainsi, si \vec{x} et \vec{y} appartiennent à $Q_- \cup \gamma(\vec{a}) \cap Q$ alors $X_1(\vec{x}, tp(\vec{x})) = X_1(\vec{y}, tp(\vec{y})) = 0$ et on déduit des estimations (5.2.8) que:

$$\begin{aligned} & \frac{(x_2^q - y_2^q) + (y_2^q - x_2^q) \mathcal{F}^{-1}(-x_1 x_2^{d-1} q \frac{v_m}{u_m}) + x_2^q \left[\mathcal{F}^{-1}(-x_1 x_2^{d-1} q \frac{v_m}{u_m}) - \mathcal{F}^{-1}(-y_1 y_2^{d-1} q \frac{v_m}{u_m}) \right]}{qv_m y_2^q x_2^q} \\ & \leq tp(\vec{x}) - tp(\vec{y}) \leq \\ & \frac{(x_2^q - y_2^q) + (y_2^q - x_2^q) \mathcal{F}^{-1}(-y_1 y_2^{d-1} q \frac{v_M}{u_M}) + x_2^q \left[\mathcal{F}^{-1}(-x_1 x_2^{d-1} q \frac{v_M}{u_M}) - \mathcal{F}^{-1}(-y_1 y_2^{d-1} q \frac{v_M}{u_M}) \right]}{qv_M y_2^q x_2^q}. \end{aligned}$$

La continuité de \mathcal{F}^{-1} permet de montrer que:

$$\lim_{\vec{y} \rightarrow \vec{x}} tp(\vec{y}) = tp(\vec{x}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in Q_- \cup \gamma(\vec{a}) \cap Q.$$

Si \vec{x} et \vec{y} appartiennent à $Q_+ \cup \gamma(\vec{a}) \cap Q$ alors $X_2(\vec{x}, tp(\vec{x})) = X_2(\vec{y}, tp(\vec{y})) = 1$ et on déduit des estimations (5.2.7) que:

$$\frac{(x_2^q - y_2^q)}{qv_M y_2^q x_2^q} \leq tp(\vec{x}) - tp(\vec{y}) \leq \frac{(x_2^q - y_2^q)}{qv_M y_2^q x_2^q}.$$

La continuité de la fonction $\frac{1}{z}$ sur \mathbb{R}_+ implique:

$$\lim_{\vec{y} \rightarrow \vec{x}} tp(\vec{y}) = tp(\vec{x}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in Q_+ \cup \gamma(\vec{a}) \cap Q.$$

La continuité de $tp : Q \rightarrow \mathbb{R}$ est alors une conséquence immédiate de la continuité de $tp : Q_{\pm} \cup \gamma(\vec{a}) \cap Q \rightarrow \mathbb{R}$ puisque $Q = Q_+ \cup Q_- \cup \gamma(\vec{a}) \cap Q$.

Montrons maintenant que $\forall x_1$ tel que $0 < x_1 < 1$ alors, $\lim_{x_2 \rightarrow 0} tp(x_1, x_2) = -\infty$.

Soit $\vec{a} = (0, 1)^T$, on pose $\vec{x}_2 = X_2(\vec{a}, t(\vec{a})) > 0$ et $\vec{b} \stackrel{\text{déf}}{=} (1, \vec{x}_2)^T$. On définit la bande \mathcal{B} par (voir figure 1):

$$\mathcal{B} = \{\vec{x} \in Q \mid 0 < x_2 < \vec{x}_2\}.$$

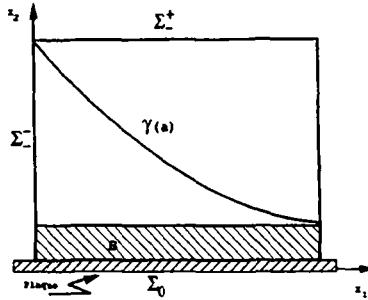


Figure 1

On s'intéresse donc aux points de \mathcal{B} . Pour tout $\vec{x} \in \mathcal{B}$, on a $X_1(\vec{x}, tp(\vec{x})) = 0$ où $\vec{X} = (X_1(\vec{x}, \tau), X_2(\vec{x}, \tau))^T$ est la solution des équations (5.2.1), (5.2.2).

La minoration (5.2.8) pour X_1 fournit:

$$x_1 + x_2^{1-d} \frac{u_M}{qv_M} \mathcal{F}(1 + qv_M x_2^q tp(\vec{x})) \leq 0,$$

et comme \mathcal{F}^{-1} est bijective et croissante on en déduit:

$$tp(\vec{x}) \leq \tau_{\min}(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\mathcal{F}^{-1}(-x_1 x_2^{d-1} \frac{qv_M}{u_M}) - 1}{qv_M x_2^q}. \quad (5.2.13)$$

Etudions la limite de $\tau_{\min}(\vec{x})$ lorsque $x_2 \rightarrow 0$.

On pose

$$\beta = \begin{cases} \frac{\exp\left(-x_1 p \frac{v_M}{u_M}\right) - 1}{p v_M} & \text{si } d = 1; \\ -\frac{x_1(d-1)}{q u_M} & \text{si } d > 1. \end{cases}$$

Dans le cas où $d > 1$, de la définition de τ_{\min} , de la règle de Bernouilli-L'hospital et du résultat:

$$\mathcal{F}^{-1'}(0) = 1$$

on déduit que:

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} \tau_{\min}(x_1, x_2) = \beta \lim_{x_2 \rightarrow 0} x_2^{-p}.$$

Le résultat ci-dessus est immédiat dans le cas $d = 1$.

De la propriété: $\beta < 0$ et de (5.2.13), on déduit que:

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} tp(x_1, x_2) = -\infty.$$

d) Pour terminer, montrons que la fonction

$$\begin{aligned} \bar{X} : D &\longrightarrow Q \\ (\vec{x}, \tau) &\mapsto \bar{X}(\vec{x}, \tau) \end{aligned}$$

est continue, c'est-à-dire:

$$\forall (\vec{x}, \tau) \in D, \forall \epsilon > 0 \exists \eta > 0 \text{ tel que } \|\vec{x} - \vec{y}\| + |\tau - t| \leq \eta \implies \|\bar{X}(\vec{x}, \tau) - \bar{X}(\vec{y}, t)\| \leq \epsilon.$$

Soit $\vec{x} \in Q$ et ϵ donnés, montrons l'existence de η tel que l'assertion précédente soit vérifiée.

La fonction $\bar{X}(\vec{x}, \cdot) : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ est continue, il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$\|\bar{X}(\vec{x}, \tau) - \bar{X}(\vec{x}, t)\| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ si } |\tau - t| \leq \eta_1.$$

Les fonctions $ts, tp : Q \longrightarrow \mathbf{R}$ sont continues, il existe donc $\eta_2 > 0$ tel que

$$[tp(\vec{y}), ts(\vec{y})] \subset [tp(\vec{x}) - 2\eta_1, ts(\vec{x}) + 2\eta_1] \text{ si } \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \eta_2.$$

On pose $I \stackrel{\text{déf}}{=} [tp(\vec{x}) - 2\eta_1, ts(\vec{x}) + 2\eta_1]$.

Il existe $\eta_3 > 0$ tel que

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \eta_3 \implies \vec{y} \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*,$$

on a donc l'existence de la fonction $\bar{X}(\bar{y}, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ solution des équations (5.2.1) telle que $\bar{X}(\bar{y}, 0) = \bar{y}$ pour tout \bar{y} vérifiant: $\|\bar{x} - \bar{y}\| \leq \eta_3$.

L'intervalle I est compact, le corollaire 1.10.2 p.124 de [2] affirme que la fonction $\bar{X}(\bar{y}, \tau)$ est une fonction continue du couple (\bar{y}, τ) sur $\{\bar{y}, \text{ tels que } \|\bar{x} - \bar{y}\| \leq \eta_3\} \times I$, et même continue par rapport à \bar{y} uniformément par rapport à τ .

$$\exists \eta_4 > 0, \text{ tel que } \|\bar{x} - \bar{y}\| \leq \eta_4 \implies \|\bar{X}(\bar{x}, t) - \bar{X}(\bar{y}, t)\| \leq \frac{\epsilon}{2} \forall t \in I.$$

On pose $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{1 \leq i \leq 4} \eta_i$, l'inégalité triangulaire implique la continuité de la fonction \bar{X} . Le lemme 5.2.1 est démontré.

□

Soit $\bar{Y} \in C^1(Q) \cap C^0(\bar{Q})$ une solution du problème (5.1.1), (5.2.2), pour $\bar{x} \in Q$, nous allons considérer l'évolution de \bar{Y} sur la courbe $\gamma(\bar{x})$.

Soit $\bar{X}(\bar{x}, \cdot)$ la solution du problème (5.2.1), (5.2.2) (voir le lemme 5.2.1 pour l'existence de \bar{X}). Le théorème de dérivation des fonctions composées, un calcul élémentaire et l'équation (5.1.1) entraînent que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \bar{Y}(\bar{X}(\bar{x}, \tau)) &= \bar{V}^\top \nabla \bar{Y}(\bar{X}(\bar{x}, \tau)) = \\ &= \bar{\Omega}(T(\bar{X}(\bar{x}, \tau)), P(\bar{X}(\bar{x}, \tau)), \bar{Y}(\bar{X}(\bar{x}, \tau))) \forall \tau \in (tp(\bar{x}), ts(\bar{x})). \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

L'équation précédente montre que si l'on connaît \bar{Y} en un point \bar{x} de la courbe $\gamma(\bar{x})$ on peut connaître \bar{Y} en tout point $\bar{y} = \bar{X}(\bar{x}, \tau)$ de la courbe $\gamma(\bar{x})$ en intégrant l'équation précédente de 0 à τ .

Nous définissons alors une solution faible du problème (5.1.1), (5.1.2) par:

Définition 5.2.1. Soit $\bar{Y}_e^-, \bar{Y}_e^+ : (0, 1) \rightarrow [\mathbb{R}_+^*]^5$ deux fonctions données. Si $\bar{X}(\bar{x}, \cdot)$, t_p et t_s désignent les fonctions définies au lemme 5.2.1, alors on dira que \bar{Y} est une solution faible du problème (5.1.1), (5.1.2) si:

$\forall \bar{x} \in Q_-$ la fonction \bar{Y} vérifie:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \bar{Y}(\bar{X}(\bar{x}, \tau)) = \bar{\Omega}(T(\bar{X}(\bar{x}, \tau)), P(\bar{X}(\bar{x}, \tau)), \bar{Y}(\bar{X}(\bar{x}, \tau))) \forall \tau \in (tp(\bar{x}), ts(\bar{x})); \\ \bar{Y}(X_2(\bar{x}, tp(\bar{x}))) = \bar{Y}_e^-(X_2(\bar{x}, tp(\bar{x}))), \end{cases}$$

et si

$\forall \bar{x} \in Q_+$ la fonction \bar{Y} vérifie:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \bar{Y}(\bar{X}(\bar{x}, \tau)) = \bar{\Omega}(T(\bar{X}(\bar{x}, \tau)), P(\bar{X}(\bar{x}, \tau)), \bar{Y}(\bar{X}(\bar{x}, \tau))) \forall \tau \in (tp(\bar{x}), ts(\bar{x})); \\ \bar{Y}(X_1(\bar{x}, tp(\bar{x}))) = \bar{Y}_e^+(X_1(\bar{x}, tp(\bar{x}))). \end{cases}$$

Remarques 5.2.1

la fonction \bar{Y} solution faible du problème (5.1.1),(5.1.2) n'est pas définie sur la courbe $\gamma(\bar{x})$.

Remarques 5.2.2

Par définition si \bar{Y} est une solution faible du problème (5.1.1),(5.1.2), alors $\forall \bar{x} \in Q_{\pm}$, $\tau \mapsto \bar{Y}(\bar{X}(\bar{x}, \tau))$ est une fonction de classe C^1 sur $(tp(\bar{x}), ts(\bar{x}))$ et continue sur $[tp(\bar{x}), ts(\bar{x})]$, où les fonctions $\bar{X}(\bar{x}, \cdot)$, tp et ts sont définies au lemme 5.2.1. On traduira cela par \bar{Y} est de classe C^1 sur $\gamma(\bar{x}) \cap Q$ pour tout $\bar{x} \in Q_{\pm}$.

Remarques 5.2.3

Si les fonctions \bar{Y}_e^- et \bar{Y}_e^+ sont définies sur $(0, 1]$, respectivement sur $[0, 1)$ et si $\bar{Y}_e^-(1) = \bar{Y}_e^+(0)$ alors la définition d'une solution faible s'étend de manière immédiate à Q tout entier en remplaçant Q_{\pm} par $Q_{\pm} \cup \gamma(\bar{x}) \cap Q$ dans la définition 5.2.1.

Maintenant nous donnons le résultat d'existence et d'unicité de solution faible pour le problème (5.1.1),(5.1.2), mais auparavant, définissons le sous-ensemble de \mathbf{R}^5 E_c par:

$$E_c \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \bar{b} \in (0, 1)^5 \text{ tels que } \sum_{i=1}^5 b_i = 1 \right\},$$

et les sous-ensembles de Σ_- , Σ_-^+ et Σ_+^+ par:

$$\Sigma_-^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{ \bar{x} = (0, s)^T, 0 < s \leq 1 \} \text{ et } \Sigma_+^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{ \bar{x} = (s, 1)^T, 0 \leq s < 1 \}.$$

Théorème 5.2.1. Supposons que les hypothèses HP1 à HP5 iii) sont satisfaites et soit $\bar{Y}_e^{\pm} : (0, 1) \longrightarrow E_c$ deux fonctions données. Si on dénote par \bar{X} et tp les fonctions définies au lemme 5.2.1 et si on pose

$$\bar{Y}_e(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \bar{Y}_e^-(X_2(\bar{x}, tp(\bar{x}))) & \text{si } \bar{X}(\bar{x}, tp(\bar{x})) \in \Sigma_-^+; \\ \bar{Y}_e^+(X_1(\bar{x}, tp(\bar{x}))) & \text{si } \bar{X}(\bar{x}, tp(\bar{x})) \in \Sigma_+^+. \end{cases}$$

alors il existe \bar{Y} une unique solution faible du problème (5.1.1),(5.1.2) à valeurs dans E_c . De plus on a:

$$A\bar{Y}(\bar{x}) = A\bar{Y}_e(\bar{X}(\bar{x}, tp(\bar{x}))) \quad \forall \bar{x} \in Q_{\pm}$$

où A est définie à l'hypothèse HP5 iii).

Avant de démontrer le théorème 5.2.1, nous donnons un résultat d'existence et d'unicité pour un problème annexe d'équations différentielles ordinaires qui nous sera utile pour montrer l'existence et l'unicité de la solution faible pour le problème (5.1.1),(5.1.2).

Soit I un intervalle compact de \mathbf{R} donné, on pose $U \stackrel{\text{def}}{=} I \times [\mathbf{R}_+^5 \setminus \vec{0}]$, et soit une fonction $\bar{\omega}$,

$$\begin{aligned} \bar{\omega} : U &\longrightarrow \mathbf{R}^5 \\ (t, \bar{W}) &\mapsto \bar{\omega}(t, \bar{W}). \end{aligned}$$

Lemme 5.2.4. Supposons que la fonction $\bar{\omega} : U \rightarrow \mathbb{R}^5$ est continue et localement Lipchitzienne en \bar{W} dans U , que $\bar{\omega} \in \text{Ker } A$ pour tout $(t, \bar{W}) \in U$ où la matrice A est définie à l'hypothèse HP5 iii). Supposons de plus que si $(t, \bar{W}) \in U$ tels que $W_i = 0$ alors $\omega_i(t, \bar{W}) > 0$ pour tout i , $1 \leq i \leq 5$. Alors:

a) pour tout point (t_0, \bar{W}_0) appartenant à l'intérieur de U , si on pose $\delta = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 W_{0j}$, il existe une unique fonction $\bar{W}(\bar{W}_0, \cdot) : I \rightarrow [\mathbb{R}_+^*]^5 \setminus [0, \delta]^5$ de classe C^1 telle que $(t, \bar{W}(\bar{W}_0, t)) \in U$ et qui vérifie:

$$\frac{d}{dt} \bar{W}(\bar{W}_0, t) = \bar{\omega}(t, \bar{W}(\bar{W}_0, t)); \quad (5.2.16)$$

$$\bar{W}(\bar{W}_0, t_0) = \bar{W}_0. \quad (5.2.17)$$

b) De plus si \mathcal{D} est un sous-ensemble ouvert de $[\mathbb{R}_+^*]^5$, tel qu'il existe K un sous-ensemble compact de $[\mathbb{R}_+^*]^5$ satisfaisant $\mathcal{D} \subset K$, alors

$$\forall \bar{W}_0 \in \mathcal{D}, \quad \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \|\bar{W}_0 - \bar{Z}_0\| \leq \eta \implies \|\bar{W}(\bar{W}_0, t) - \bar{W}(\bar{Z}_0, t)\| \leq \epsilon \forall t \in I. \quad (5.2.18)$$

Démonstration. Principe de la démonstration. On montre l'existence locale, puis on montre que les composantes du vecteur solution sont positives et restent bornées. On obtient alors l'existence dans I .

a) Le théorème 1.8.3 de [2] p. 122 fournit, l'existence d'un plus grand intervalle J de \mathbb{R} tel que t_0 appartienne à l'intérieur de J , et l'existence d'une unique fonction $\bar{W}(\bar{W}_0, \cdot) : J \rightarrow \mathbb{R}^5$ de classe C^1 telle que $(t, \bar{W}(\bar{W}_0, t)) \in U$ et qui vérifie les équations (5.2.16), (5.2.17).

Montrons Maintenant que:

$$A\bar{W}(\bar{W}_0, t) = A\bar{W}_0 \quad \forall t \in J. \quad (5.2.19)$$

D'après (5.2.16) et la propriété $\bar{\omega} \in \text{Ker } A$ on déduit:

$$\frac{d}{dt} A\bar{W}(\bar{W}_0, t) = A\bar{\omega}(t, \bar{W}(\bar{W}_0, t)) = 0 \forall t \in J,$$

ce qui prouve (5.2.19).

L'hypothèse HP5 iii) et (5.2.19) impliquent que

$$\sum_{i=1}^5 W_i(\bar{W}_0, t) = \sum_{i=1}^5 W_{0i}, \quad \forall t \in J. \quad (5.2.20)$$

Puisque $(t, \bar{W}(\bar{W}_0, t)) \in U$ on en déduit:

$$0 \leq W_i(\bar{W}_0, t) \leq \sum_{j=1}^5 W_{0j} \text{ pour tous les } i \text{ } 1 \leq i \leq 5 \forall t \in J;$$

$$\forall t \in J, \exists l, 1 \leq l \leq 5 \text{ tel que } \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 W_{0j} \leq W_l(\bar{W}_0, t). \quad (5.2.21)$$

Montrons que la propriété:

$$0 < W_i(\bar{W}_0, t) \text{ pour tous les } i, 1 \leq i \leq 5 \forall t \in J. \quad (5.2.22)$$

est vraie.

Pour cela supposons qu'il existe une suite $\{t_n\}_{n \geq 0} \in J$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \hat{t}, \\ 0 < W_i(\bar{W}_0, t_n) \quad \forall n \quad \forall i, \text{ tel que } 1 \leq i \leq 5$$

et telle qu'il existe $j, 1 \leq j \leq 5$ vérifiant:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_j(\bar{W}_0, t_n) = 0.$$

De la première estimation de (5.2.21) et de l'hypothèse: $\bar{\omega}$ est localement Lipchitzienne, il est aisé de montrer en intégrant l'équation (5.2.16)) que $W_i(\bar{W}_0, t_n)$ est une suite de Cauchy pour tout i tel que $1 \leq i \leq 5$, et donc que

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} W_i(\bar{W}_0, t_n) = W_i(\bar{W}_0, \hat{t}) \text{ pour tous les } i, 1 \leq i \leq 5.$$

La deuxième inégalité de (5.2.21) implique qu'il existe $l \neq j, 1 \leq l \leq 5$ tel que

$$0 < W_l(\bar{W}_0, \hat{t}), \text{ et ainsi } \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\omega}(t_n, \bar{W}(\bar{W}_0, t_n)) = \bar{\omega}(\hat{t}, \bar{W}(\bar{W}_0, \hat{t})),$$

et donc $\hat{t} \in J$.

La fonction $W_j(\bar{W}_0, \cdot)$ est non croissante en $t = \hat{t}$, on déduit de l'équation (5.2.16) que $\omega_j(\hat{t}, \bar{W}(\bar{W}_0, \hat{t})) \leq 0$, ce qui contredit la propriété:

$$\forall \bar{Z} \in [\mathbb{R}_+^5 \setminus \bar{0}], 0 < \omega_j(t, \bar{Z}) \text{ si } Z_j = 0, \forall t \in J.$$

On a donc prouvé (5.2.22).

En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 5.2.1, il est immédiat de déduire de (5.2.22) et de (5.2.20) que $I \subset J$.

Si on pose $\delta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 W_{0_j}$, nous venons de montrer l'existence et l'unicité d'une fonction $\bar{W}(\bar{W}_0, \cdot) : I \longrightarrow [\mathbb{R}_+^5 \setminus [0, \delta_1)^5$ de classe C^1 solution des équations (5.2.16), (5.2.17).

b) Montrons maintenant l'item (5.2.18). Soit $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \min_{W_0 \in K} \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 W_{0_j}$, l'égalité (5.2.20) et (5.2.22) induisent l'existence de $F \subset [\mathbb{R}_+^5 \setminus [0, \delta)^5$ un sous-ensemble borné tel que

$$\bar{W}(\bar{W}_0, t) \in F \quad \forall t \in I \text{ et } \forall \bar{W}_0 \in \mathcal{D}.$$

Soit $U_1 = I \times F$, alors pour tout $\tilde{W}_0 \in \mathcal{D}$ on a l'existence d'une fonction

$$\tilde{W}(\tilde{W}_0, \cdot) : I \longrightarrow [\mathbb{R}_+^*]^5 \setminus [0, \delta]^5$$

de classe C^1 telle que $(t, \tilde{W}(\tilde{W}_0, t)) \in U_1$ et vérifiant les équations (5.2.16), (5.2.17).

La fonction $\tilde{\omega}$ est Lipchitzienne sur U_1 , le corollaire 1.10.2 de [2] p.124 affirme que la fonction $\tilde{W} : \mathcal{D} \times I \longrightarrow [\mathbb{R}_+^*]^5 \setminus [0, \delta]^5$ est continue et même continue en \tilde{W}_0 uniformément en t , ce qui prouve l'item (5.2.18). Le lemme 5.2.4 est démontré.

□

Maintenant nous sommes en mesure de démontrer le théorème 5.2.1.

Démonstration du théorème 5.2.1. Soit $\epsilon > 0$, $\forall \tilde{x} \in Q_{\pm}$, on pose

$$I \stackrel{\text{def}}{=} [tp(\tilde{x}) - \epsilon, tp(\tilde{x}) + \epsilon], \quad \tilde{W}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{Y}_{\epsilon}(\tilde{X}(\tilde{x}, tp(\tilde{x}))), \quad t_0 \stackrel{\text{def}}{=} tp(\tilde{x}) \quad (5.2.23)$$

et on définit la fonction $\tilde{\omega}$ par:

$$\tilde{\omega}(t, \tilde{Z}) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\Omega}(T(\tilde{X}(\tilde{x}, t)), P(\tilde{X}(\tilde{x}, t)), \tilde{Z}) \text{ pour tout } (t, \tilde{Z}) \in I \times [\mathbb{R}_+^5 \setminus \vec{0}].$$

Si on définit U par: $U \stackrel{\text{def}}{=} I \times [\mathbb{R}_+^5 \setminus \vec{0}]$, alors les hypothèses HP5 i), HP1 et le lemme 5.2.1 impliquent que $\tilde{\omega}$ est continue sur U .

L'intervalle I est compact, les hypothèses HP5 i), HP1 et le lemme 5.2.1 ($\tilde{X}(\tilde{x}, \cdot)$ prend ses valeurs dans Θ) entraînent que $\tilde{\omega}$ est localement Lipchitzienne en \tilde{Z} . Les autres hypothèses requises au lemme 5.2.4 sont des conséquences immédiates des hypothèses HP1, HP5 ii) et iii). Pour tout $\tilde{x} \in Q_{\pm}$, le lemme 5.2.4 fournit l'existence d'une fonction $\tilde{W}(\tilde{W}_0, \cdot) : I \longrightarrow [\mathbb{R}_+^*]^5 \setminus [0, \frac{1}{5}]^5$ de classe C^1 telle que:

$$\tilde{W}(\tilde{W}_0, t) = \tilde{W}_0 + \int_{t_0}^t \tilde{\omega}(s, \tilde{W}(\tilde{W}_0, s)) ds \quad (5.2.24)$$

où $t_0 = tp(\tilde{x})$. On pose

$$\tilde{Y}(\tilde{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{Y}(\tilde{X}(\tilde{x}, 0)) = \tilde{W}(\tilde{W}_0, 0), \quad (5.2.25)$$

il est immédiat de vérifier à partir de (5.2.24) que $\tilde{Y}(\tilde{x})$ est une solution faible de (5.1.1), (5.1.2). L'unicité de la solution faible résulte de l'unicité de la fonction $\tilde{W}(\tilde{W}_0, \cdot)$.

Les relations (5.2.20) et (5.2.22) impliquent que $\tilde{Y} \in E_c$. La propriété

$$A\tilde{Y}(\tilde{x}) = A\tilde{Y}_{\epsilon}(\tilde{X}(\tilde{x}, tp(\tilde{x}))) \quad \forall \tilde{x} \in Q_{\pm}$$

est une conséquence de (5.2.19). Le théorème 5.2.1 est démontré.

□

Terminons cette section par quelques remarques. La fonction tp est continue, alors en raisonnant comme nous l'avons fait pour montrer la continuité de la fonction \bar{X} au lemme 5.2.1, nous obtenons pour tout $\bar{x} \in Q$ l'existence d'un intervalle I et d'un nombre $\eta > 0$ tels que

$$I(\bar{y}) \subset I \forall \bar{y} \text{ tels que } \|\bar{x} - \bar{y}\| \leq \eta.$$

La fonction $\bar{\omega}$ est Lipchitzienne par rapport à \bar{Z} sur $I \times [0, \frac{1}{5})^5$ et puisque la fonction \bar{W} solution de (5.2.16), (5.2.17) est continue par rapport à \bar{W}_0 uniformément en t (voir (5.2.18)), il est aisé de montrer que si $\bar{Y}_\epsilon^\pm : [0, 1] \rightarrow E_c$ sont continues, alors $\bar{Y} : Q_\pm \cup \gamma(\bar{a}) \cap Q \rightarrow E_c$ la solution faible du problème (5.1.1), (5.1.2) est continue.

5.3. Comportement asymptotique dans un voisinage de Σ_0 .

Dans cette dernière section, nous montrons que \bar{Y} , les fractions massiques des espèces tendent vers leurs valeurs d'équilibre lorsque l'on s'approche de Σ_0 . Ce résultat est obtenu en étudiant l'équation (5.1.1) sur les courbes caractéristiques $\gamma(\bar{x}) \cap Q$. Nous avons montré que $tp(\bar{x})$ tendait vers $-\infty$ lorsque l'on s'approchait de Σ_0 (voir lemme 5.2.1), le comportement asymptotique de \bar{Y} est donc réduit à une propriété de stabilité à l'infini pour les équations (5.2.16), (5.2.17), (d'après la définition (5.2.25) de \bar{Y}) uniforme par rapport à la donnée initiale. Pour étudier la stabilité à l'infini nous sommes amenés à utiliser la fonction (d'enthalpie libre) g^Z comme fonction de Lyapounov.

Avant d'énoncer le résultat principal de cette section, montrons que l'on peut mesurer la distance de $\bar{Y}(\bar{x})$ à sa valeur d'équilibre à l'aide de la fonction d'enthalpie libre g^Z . Plus précisément nous avons la proposition suivante dont la démonstration est donnée à la fin de cette section.

Lemme 5.3.1. *Soit \mathcal{H} et \mathcal{S}_0 deux sous-ensembles compacts de $(\mathbb{R}_+^*)^2$, alors $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon, \mathcal{H}, \mathcal{S}_0)$ tel que :*

$$[g^Z(T, P, \bar{Y}) - g^Z(T, P, \bar{C}^z(T, P, A\bar{Y}))] \leq \delta(\epsilon, \mathcal{H}, \mathcal{S}_0)$$

implique

$$\|\bar{Y} - \bar{C}^z(T, P, A\bar{Y})\| \leq \epsilon \text{ pour tout } (T, P, \bar{Y}) \in \mathcal{H} \times [[0, 1]^5 \setminus \bar{0}] \text{ satisfaisant } A\bar{Y} \in \mathcal{S}_0.$$

On définit \tilde{E}_c par :

$$\tilde{E}_c \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{b} \in E_c \mid A^z \bar{b} \in (0, 1)^2\} \text{ où } E_c = \{\bar{b} \in (0, 1)^5 \mid \sum_{i=1}^5 b_i = 1\}.$$

Le résultat principal de cette section est :

Théorème 5.3.1. *Supposons les hypothèses HP1 à HP5 v) satisfaites, et dénotons par \bar{X} et tp les fonctions définies au lemme 5.2.1. Si on pose*

$$\bar{Y}_\epsilon(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \bar{Y}_\epsilon^-(X_2(\bar{x}, tp(\bar{x}))) \text{ si } \bar{X}(\bar{x}, tp(\bar{x})) \in \Sigma_-; \\ \bar{Y}_\epsilon^+(X_1(\bar{x}, tp(\bar{x}))) \text{ si } \bar{X}(\bar{x}, tp(\bar{x})) \in \Sigma_+^-, \end{cases}$$

et si on suppose de plus que

- i) $\bar{Y}_\epsilon^\pm : (0, 1) \longrightarrow E_c$ et que $\bar{Y}_\epsilon^-(s) \in \tilde{E}_c \forall s \in (0, 1)$;
- ii) il existe \mathcal{S}_0 un sous-ensemble compact de $\{\bar{b} \in (0, 1)^2 \mid \sum_{i=1}^2 b_i = 1\}$ tel que $A\bar{Y}_\epsilon^-(s) \in \mathcal{S}_0 \forall s \in (0, 1)$.

Alors pour tout $x_1 \in (0, 1]$ fixé, \bar{Y} la solution faible du problème (5.1.1), (5.1.2) vérifie :

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} \|\bar{Y}(\bar{x}) - \bar{C}^z(T(\bar{x}), P(\bar{x}), A\bar{Y}(\bar{x}))\| = 0 \quad (5.3.1)$$

où $\bar{x} = (x_1, x_2)^\top$ et où \bar{C}^z et A sont définis à l'hypothèse HP5.

Le théorème 5.2.1 fournit l'existence et l'unicité de $\bar{Y} \in E_c$ la solution faible des équations (5.1.1), (5.1.2). D'après l'hypothèse i) du théorème 5.3.1 et d'après la propriété:

$$A\bar{Y}(\bar{x}) = A\bar{Y}_e(\bar{X}(\bar{x}, tp(\bar{x}))) \quad \forall \bar{x} \in Q_\pm$$

donnée au théorème 5.2.1, on a que $A\bar{Y}(\bar{x}) \in S_0$

L'hypothèse HP1 implique que $(T(\bar{x}), P(\bar{x}))$ appartiennent à un sous-ensemble compact \mathcal{H} de $(\mathbb{R}_+^*)^2$, le lemme 5.3.1 montre que pour établir l'assertion (5.3.1) il suffit de montrer que:

$$\begin{aligned} \forall x_1 \in (0, 1] \text{ fixé, pour } \bar{x} = (x_1, x_2)^\top \in Q_- \cup \{\bar{x} = (1, s)^\top, 0 < s \leq \bar{x}_2\}, \\ \lim_{x_2 \rightarrow 0} g^Z(T(\bar{x}), P(\bar{x}), \bar{Y}(\bar{x})) - g^Z(T(\bar{x}), P(\bar{x}), \bar{C}^z(T(\bar{x}), P(\bar{x}), A\bar{Y}(\bar{x}))) = 0 \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Pour établir la propriété (5.3.2) on procède de la manière suivante:

- 1) On étudie $g^Z(T(\bar{x}), P(\bar{x}), \bar{Y}(\bar{x})) - g^Z(T(\bar{x}), P(\bar{x}), \bar{C}^z(T(\bar{x}), P(\bar{x}), A\bar{Y}(\bar{x})))$ sur les courbes $\gamma(\bar{x})$ en montrant que cette différence vérifie une inéquation différentielle;
- 2) lorsque $\bar{x} \in Q_-$ et $x_2 \rightarrow 0$, on étudie le comportement asymptotique des solutions de l'inéquation différentielle.
- 3) On conclut.

Introduisons quelques notations et énonçons trois lemmes qui seront nécessaires pour montrer que la propriété (5.3.2) est vérifiée. Les démonstrations de ces lemmes seront données après la démonstration du théorème 5.3.1.

Pour tout

$$\bar{x} \in Q_- \cup \{\bar{x} = (1, s)^\top, 0 < s \leq \bar{x}_2\}$$

on pose $\bar{x}_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \bar{X}(\bar{x}, tp(\bar{x}))$ et on définit la fonction $\Delta G : [0, t(\bar{x}) - tp(\bar{x})] \rightarrow \mathbb{R}_+$ par:

$$\begin{aligned} \Delta G(t) = g^Z\left(T(\bar{X}(\bar{x}_0, t + tp(\bar{x}))), P(\bar{X}(\bar{x}_0, t + tp(\bar{x}))), \bar{Y}(\bar{X}(\bar{x}_0, t + tp(\bar{x})))\right) - \\ g^Z\left(T(\bar{X}(\bar{x}_0, t + tp(\bar{x}))), P(\bar{X}(\bar{x}_0, t + tp(\bar{x}))), \right. \\ \left. \bar{C}^z\left(T(\bar{X}(\bar{x}_0, t + tp(\bar{x}))), P(\bar{X}(\bar{x}_0, t + tp(\bar{x}))), A\bar{Y}(\bar{X}(\bar{x}_0, t + tp(\bar{x})))\right)\right), \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

où les fonctions \bar{X} , tp et ts sont définies au lemme 5.2.1.

On a

$$\Delta G(0) = g^Z\left(T(\bar{x}_0), P(\bar{x}_0), \bar{Y}(\bar{x}_0)\right) - g^Z\left(T(\bar{x}_0), P(\bar{x}_0), \bar{C}^z(T(\bar{x}_0), P(\bar{x}_0), A\bar{Y}(\bar{x}_0))\right).$$

1) Etude de ΔG sur les courbes $\gamma(\bar{x})$. Commençons par préciser l'inéquation différentielle que ΔG satisfait.

Lemme 5.3.2. Sous les hypothèses du théorème 5.3.1, pour tout $\bar{x} \in Q_- \cup \{\bar{x} = (1, s)^\top, 0 < s \leq \bar{x}_2\}$ si k est la constante définie à l'hypothèse HP5 v) qui ne dépend ni de \bar{x} ni de \bar{x}_0 , alors la fonction ΔG de classe C^1 satisfait:

$$\frac{d}{dt} \Delta G(t) \leq -k \Delta G(t) + f(t) \quad \forall t \in [0, ts(\bar{x}) - tp(\bar{x})], \quad (5.3.4)$$

où $f : [0, ts(\bar{x}) - tp(\bar{x})] \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction continue définie par:

$$f \stackrel{\text{déf}}{=} \left[\frac{\partial}{\partial T} [g^Z(T, P, \bar{Y}) - g^Z(T, P, \bar{C}^Z(T, P, A\bar{Y}))](\nabla T)^\top + \frac{\partial}{\partial P} [g^Z(T, P, \bar{Y}) - g^Z(T, P, \bar{C}^Z(T, P, A\bar{Y}))](\nabla P)^\top \right] \frac{d}{dt} \bar{X}(\bar{x}_0, tp(\bar{x}) + .) \quad (5.3.5)$$

et où T, P, \bar{Y} et \bar{C}^Z représentent les fonctions en un point de la courbe $\gamma(\bar{x}) \cap \bar{Q}$.

Donnons maintenant une estimation de $f(t)$ en fonction de t .

Lemme 5.3.3. Supposons les hypothèses du théorème 5.3.1 satisfaites et soit $C = \frac{1}{qv_m}$ (où $v_m, q = p + d - 1$ sont définis à la section 2 et à l'hypothèse HP3), alors il existe une constante positive M indépendante de \bar{x} et de \bar{x}_0 telle que:

$$\|f(t)\| \leq \frac{M}{(C+t)^{\frac{q}{2}}} \quad \forall t \in [0, ts(\bar{x}) - tp(\bar{x})], \quad \forall \bar{x} \in Q_- \cup \{\bar{x} = (1, s)^\top, 0 < s \leq \bar{x}_2\}. \quad (5.3.6)$$

2) Maintenant précisons le comportement de ΔG lorsque t tend vers l'infini.

Lemme 5.3.4. Supposons les hypothèses du théorème 5.3.1 satisfaites et soit ΔG une solution de l'inéquation (5.3.4), alors elle vérifie:

$$\forall \epsilon > 0, \exists t(\epsilon) \text{ tel que } \forall t \geq t(\epsilon) \text{ on ait } |\Delta G(t)| \leq 2\epsilon. \quad (5.3.7)$$

De plus, $t(\epsilon)$ est indépendante de $\bar{x} \in Q_-$ (et donc de \bar{x}_0 aussi).

Démonstration du théorème 5.3.1. 3) Prouvons l'assertion (5.3.2). Le lemme 5.3.4 implique que $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta G(t) = 0$, aussi montrons que $\forall x_1 \in (0, 1]$ fixé, t le paramètre de la courbe $\gamma(\bar{x}) \cap Q$ tend vers l'infini lorsque x_2 tend vers zéro. Pour cela estimons le paramètre t . Lorsque

$$\bar{x} \in Q_- \cup \{\bar{x} = (1, s)^\top, 0 < s \leq \bar{x}_2\},$$

en posant $x_2 = X_2(\bar{x}_0, t + tp(\bar{x}))$, d'après l'estimation (5.2.5) on a:

$$\frac{1}{qv_M x_2^q} - \frac{1}{qv_M x_{0_2}^q} \leq t.$$

Il nous suffit donc de montrer que:

$$\forall x_1 \in (0, 1] \text{ fixé, pour } \bar{x} \stackrel{\text{déf}}{=} (x_1, x_2)^\top \in Q_- \cup \{\bar{x} = (1, s)^\top, 0 < s \leq \bar{x}_2\} \text{ tel que } x_2 \rightarrow 0 \\ \text{alors } ts(\bar{x}) - tp(\bar{x}) \rightarrow +\infty.$$

Nous avons montré au lemme 5.2.1 qu'en définissant β par

$$\beta = \begin{cases} \frac{\exp\left(-x_1 p \frac{v_M}{u_M}\right)^{-1}}{p v_M} & \text{si } d = 1; \\ -\frac{x_1(d-1)}{q u_M} & \text{si } d > 1, \end{cases} \text{ on a } \lim_{x_2 \rightarrow 0} tp(\bar{x}) = \beta \lim_{x_2 \rightarrow 0} x_2^{-p} = -\infty,$$

et que $-\infty < ts(\bar{x}) < +\infty \forall \bar{x} \in Q$. Ce qui prouve que $\lim_{x_2 \rightarrow 0} ts(\bar{x}) - tp(\bar{x}) = +\infty$ et que l'assertion (5.3.2) est vraie. Le théorème 5.3.1 est démontré.

□

Donnons maintenant les démonstrations des lemmes 5.3.2, 5.3.3 et 5.3.4.

Démonstration du lemme 5.3.2. Soit $\bar{x} \in Q_- \cup \{\bar{x} = (1, s)^\top, 0 < s \leq \bar{x}_2\}$ fixé. Des hypothèses HP1, HP5 iiiii), du lemme 5.2.1 et de la remarque 5.2.2 nous déduisons que la fonction ΔG est de classe C^1 . Calculons sa dérivée. Le théorème de dérivation des fonctions composées permet d'écrire:

$$\frac{d}{dt} \Delta G(t) = \left(\frac{\partial g^Z}{\partial \bar{Y}} \right)^\top \left[T(\bar{X}(\bar{x}_0, t + tp(\bar{x}))), P(\bar{X}(\bar{x}_0, t + tp(\bar{x}))), \bar{Y}(\bar{X}(\bar{x}_0, t + tp(\bar{x}))) \right] \\ + \frac{d}{dt} \bar{Y}(\bar{X}(\bar{x}_0, tp(\bar{x}) + t)) + f(t), \forall t \in [0, t(\bar{x}) - tp(\bar{x})], \forall \bar{x} \in Q_-, \quad (5.3.8)$$

où f a pour expression (lorsque T, P, \bar{Y} et \bar{C}^z représentent les fonctions en un point de la courbe $\gamma(\bar{x}) \cap Q$)

$$\left[\frac{\partial}{\partial T} [g^Z(T, P, \bar{Y}) - g^Z(T, P, \bar{C}^z)] (\nabla T)^\top + \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial P} [g^Z(T, P, \bar{Y}) - g^Z(T, P, \bar{C}^z)] (\nabla P)^\top \right] \frac{d}{dt} \bar{X}(\bar{x}_0, tp(\bar{x}) + \cdot) \\ - \left(\frac{\partial g^Z}{\partial \bar{C}^z} \right)^\top (T, P, \bar{C}^z) \frac{d}{dt} \bar{C}^z \left(T(\bar{X}(\bar{x}_0, tp(\bar{x}) + \cdot), P(\bar{X}(\bar{x}_0, tp(\bar{x}) + \cdot), A\bar{Y}(\bar{X}(\bar{x}_0, tp(\bar{x}) + \cdot)) \right). \quad (5.3.9)$$

Montrons que $\frac{d}{dt} \bar{C}^z(T, P, A\bar{Y}) \in \text{Ker} A$ en tout point de la courbe $\gamma(\bar{x}) \cap Q$. D'après le théorème 5.2.1 on sait que $A\bar{Y}$ est constant sur $\gamma(\bar{x}) \cap Q$, on en déduit:

$$A \frac{d}{dt} \bar{C}^z = \frac{d}{dt} A \bar{C}^z = 0$$

sur $\gamma(\bar{x}) \cap Q$.

L'hypothèse HP5 iiiii) fournit:

$$\frac{\partial g^Z}{\partial \bar{C}^z}(T, P, \bar{C}^z) = \bar{\mu}^z(T, P, \bar{C}^z) \in \{Ker A\}^\perp$$

d'où

$$\frac{\partial g^Z}{\partial \bar{C}^z}(T, P, \bar{C}^z) \frac{d}{dt} \bar{C}^z = 0,$$

et l'expression (5.3.9) se réduit à (5.3.5).

La continuité de f est alors une conséquence des hypothèses HP1, HP5 iiiii) et du lemme 5.2.1 ($\bar{X}(\bar{x}_0, tp(\bar{x}) + \cdot)$ est une fonction de classe C^1).

Examinons maintenant le terme

$$\left(\frac{\partial g^Z}{\partial \bar{Y}} \right)^\top \frac{d}{dt} \bar{Y}$$

apparaissant dans l'égalité (5.3.8). De l'hypothèse HP5 iiiii) ($\frac{\partial g^Z}{\partial \bar{Z}} = \bar{\mu}^z$) de l'équation (5.1.1) et de la remarque 5.2.2 on déduit que

$$\left(\frac{\partial g^Z}{\partial \bar{Y}} \right)^\top \frac{d}{dt} \bar{Y} = \bar{\Omega}^\top \bar{\mu}^z \text{ sur } \gamma(\bar{x}) \cap Q, \quad (5.3.10)$$

Utilisant l'hypothèse HP5 v) (puisque T, P et $A\bar{Y}$ ($A\bar{Y} \subset S_0$) restent dans un sous-ensemble compact), on peut majorer le second membre de (5.3.10) par :

$$\bar{\Omega}^\top \bar{\mu}^z \leq -k\Delta G \text{ sur } \gamma(\bar{x}) \cap Q, \forall \bar{x} \in Q_- \cup \{\bar{x} = (1, s)^\top, 0 < s \leq \bar{x}_2\}, \quad (5.3.11)$$

où la constante $k > 0$ est définie à l'hypothèse HP5 v) et ne dépend pas de \bar{x} . Finalement regroupant (5.3.8), (5.3.5) et (5.3.11) on obtient (5.3.4). Le lemme 5.3.2 est démontré.

□

Démonstration du lemme 5.3.3. Les fonctions T et P sont bornées ainsi que leurs dérivées sur \bar{Q} (voir hypothèse HP1). L'hypothèse ii) du théorème 5.3.1 entraîne que $A\bar{Y}(\bar{x}) \in S_0$ $\forall \bar{x} \in Q_- \cup \{\bar{x} = (1, s)^\top, 0 < s \leq \bar{x}_2\}$. De l'hypothèse HP5 iiiii) on déduit que \bar{C}^z reste bornée, la différentiabilité de g^Z entraîne alors l'existence d'une constante M_1 telle que sur Q on ait:

$$\left\| \frac{\partial}{\partial T} [g^Z(T, P, \bar{Y}) - g^Z(T, P, \bar{C}^z(T, P, A\bar{Y}))] (\nabla T)^\top + \frac{\partial}{\partial P} [g^Z(T, P, \bar{Y}) - g^Z(T, P, \bar{C}^z(T, P, A\bar{Y}))] (\nabla P)^\top \right\| \leq M_1.$$

D'après (5.3.5), pour établir l'estimation (5.3.6) il suffit de montrer l'existence d'une constante positive M_2 telle que:

$$\left\| \frac{d}{dt} \bar{X}(\bar{x}_0, t + tp(\bar{x})) \right\| \leq \frac{M_2}{(C+t)^{\frac{1}{2}}} \forall t \in [0, ts(\bar{x} - tp(\bar{x}))], \forall \bar{x} \in Q_-. \quad (5.3.12)$$

où $\bar{x}_0 = \bar{X}(\bar{x}_0, tp(\bar{x}))$. Des estimations (5.2.3), (5.2.4) on déduit l'existence d'une constante C_1 indépendante de \bar{x} et de \bar{x}_0 telle que:

$$\left\| \frac{d}{dt} \bar{X}(\bar{x}_0, t + tp(\bar{x})) \right\| \leq C_1 [X_2^p(\bar{x}_0, t + tp(\bar{x})) + X_2^{p+q}(\bar{x}_0, t + tp(\bar{x}))] \\ \forall t \in [0, ts(\bar{x}) - tp(\bar{x})], \forall \bar{x} \in Q_{-}. \quad (5.3.13)$$

L'inégalité (5.2.5) avec $\bar{x} = \bar{x}_0$ et $\tau = t + tp(\bar{x})$ fournit:

$$0 < X_2(\bar{x}_0, t + tp(\bar{x})) \leq \frac{\left(\frac{1}{qv_m}\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\frac{1}{qv_m} + t\right)^{\frac{1}{p}}} \forall t \in [0, ts(\bar{x}) - tp(\bar{x})]. \quad (5.3.14)$$

On pose $M_2 \stackrel{\text{def}}{=} 2\left(\frac{1}{qv_m}\right)^{\frac{1}{p}} C_1$, $C = \frac{1}{qv_m}$, et combinant (5.3.13) avec (5.3.14) on obtient (5.3.6) avec $M \stackrel{\text{def}}{=} M_1 M_2$. Le lemme 5.3.3 est démontré.

□

Démonstration du lemme 5.3.4. On multiplie l'équation (5.3.4) par $\exp(kt)$, elle s'écrit:

$$\frac{d}{dt} [\exp(kt) \Delta G(t)] \leq \exp(kt) f(t).$$

On intègre cette équations de 0 à t , on en déduit:

$$\Delta G(t) \leq \exp(-kt) \Delta G(0) + \exp(-kt) \int_0^t |f(s)| \exp(ks) ds. \quad (5.3.15)$$

La valeur $\Delta G(0)$ est non négative (d'après la définition de \bar{C}^z , voir HP5 iiiii) et $\Delta G(t)$ définie en (5.3.3) est majorée en fonction de g_M^z le maximum de la fonction $|g^z(T(\bar{x}), P(\bar{x}), \bar{Y}(\bar{x}))|$ lorsque $\bar{x} \in \bar{Q}$ et lorsque $\bar{Y} \in E_c$. On a:

$$\Delta G(0) \leq 2g_M^z. \quad (5.3.16)$$

Ainsi,

$$\Delta G(0) \exp(-kt) \leq \epsilon \text{ si } t \geq \frac{1}{k} \left| \log \left(\frac{\epsilon}{2g_M^z} \right) \right|. \quad (5.3.17)$$

De l'estimation (5.3.6) on déduit l'existence de $\bar{t}(\frac{\epsilon}{2}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{2M}{k\epsilon} \right)^{\frac{1}{p}} - C$ (où M, C sont définis au lemme 5.3.3) tels que

$$|f(s)| \leq \frac{k\epsilon}{2} \quad \forall s \geq \bar{t}(\frac{\epsilon}{2}).$$

On a :

$$\exp(-kt) \int_0^t |f(s)| \exp(ks) ds = \exp(-kt) \left[\int_0^{\bar{t}(\frac{\epsilon}{2})} |f(s)| \exp(ks) ds + \int_{\bar{t}(\frac{\epsilon}{2})}^t |f(s)| \exp(ks) ds \right]. \quad (5.3.18)$$

Si $C = \frac{1}{qv_m}$, en vertu de (5.3.6) on majore le membre de droite de (5.3.18) par :

$$\exp\left(k(-t + \bar{t}(\frac{\epsilon}{2}))\right) \frac{M}{kC^{\frac{2}{q}}} + \frac{\epsilon}{2}.$$

On pose

$$t(\epsilon) = \max\left(\frac{1}{k} \left| \log\left(\frac{\epsilon}{2g_M^2}\right) \right|, \bar{t}(\frac{\epsilon}{2}) + \frac{1}{k} \left| \log\left(\frac{\epsilon C^{\frac{2}{q}}}{2Mk}\right) \right| \right),$$

et d'après (5.3.15) on a $\Delta G(t) \leq 2\epsilon$. Le lemme 5.3.4 est démontré.

□

Il ne reste maintenant plus qu'à démontrer le lemme 5.3.1.

Démonstration du lemme 5.3.1. La démonstration se fait ab absurdo. La négation du lemme 5.3.1 fournit l'existence de $\epsilon > 0$ et d'une suite

$$\left\{ (T^n, P^n, \bar{Y}^n) \right\}_{n \geq 0} \in \mathcal{H} \times [0, 1]^5 \setminus \bar{0} \text{ vérifiant } A\bar{Y}^n \in \mathcal{S}_0, \text{ telle que:}$$

$$i) [g^z(T^n, P^n, \bar{Y}^n) - g^z(T^n, P^n, \bar{C}^z(T^n, P^n, A^z \bar{Y}^n))] \leq \frac{1}{n} \quad \forall n,$$

et telle que

$$ii) \|\bar{Y}^n - \bar{C}^z(T^n, P^n, A^z \bar{Y}^n)\| > \epsilon.$$

De la compacité de \mathcal{H} et de $[0, 1]^5$, on déduit l'existence d'une sous-suite extraite encore notée $\left\{ (T^n, P^n, \bar{Y}^n) \right\}_{n \geq 0}$ de la suite $\left\{ (T^n, P^n, \bar{Y}^n) \right\}_{n \geq 0}$ qui converge vers $(T, P, \bar{Y}) \in \mathcal{H} \times [0, 1]^5$ et vérifiant $A\bar{Y} \in \mathcal{S}_0$.

Soit $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \min_{W \in \mathcal{S}_0} \sum_{i=1}^2 W_i$, l'hypothèse HP5 iii) ($\sum_{i=1}^2 A_{ij} = 1$ pour tout j , $1 \leq j \leq 5$) implique que

$$\eta \leq \sum_{i=1}^2 (A\bar{Y})_i = \sum_{j=1}^5 Y_j,$$

donc $\bar{Y} \neq \bar{0}$. La continuité de g^z et de \bar{C}^z (voir HP5 iiiii)) induit la relation suivante:

$$g^z(T, P, \bar{Y}) - g^z(T, P, \bar{C}^z(T, P, A^z \bar{Y})) = 0 \text{ avec } \bar{C}^z(T, P, A^z \bar{Y}) \neq \bar{Y}$$

ce qui contredit la définition de \bar{C}^z (voir HP5 iiiii)). Le lemme 5.3.1 est démontré.

□

REFERENCES

1. Boillat .E, Pousin J., *Modélisation thermodynamique de l'air.*, Rapport interne Dep. de Math. E.P.F.L, 1990.
2. Cartan H., *Calcul différentiel.*, Hermann, Paris, 1971.
3. INRIA GAMNI-SMAI, *Workshop on hypersonic flow for reentry problems*, INRIA 22-25 january 1990, ANTIBES (France).

CHAPITRE 6

Méthode numérique

Résumé.

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode numérique simple pour simuler le comportement de couches limites chimiquement réactives apparaissant au voisinage d'un corps bidimensionnel ou axisymétrique. Les caractéristiques principales de la méthode peuvent être décrites succinctement par:

- Un schéma aux différences implicite est utilisé dans la direction tangentielle au corps, alors qu'un schéma centré pour les termes de diffusion et décentré pour les termes de convection est utilisé dans la direction normale au corps, ce qui conduit à une méthode de marche.
- lorsque cela est possible, une partie des termes non linéaires est évaluée à la position précédente où ceux-ci ont déjà été calculés.

La méthode que nous présentons est une extension immédiate de celle décrite dans Boillat-Pousin [2].

6.1. Introduction.

Lorsque l'on s'intéresse à la description de l'écoulement stationnaire et laminaire de fluide chimiquement réactif constitué de N espèces chimiques autour d'un corps bidimensionnel (voir figure 1), une description réaliste est fournie par les équations d'Euler associées aux lois de la thermodynamique, à l'exception toutefois d'une région située au voisinage du corps. Dans cette région les effets de la diffusion visqueuse peuvent être négligés dans la direction principale de l'écoulement, mais pas dans la direction normale au corps.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'écoulement situé entre le choc et le corps dans le cadre de la théorie de la couche limite laminaire.

Nous notons δ la hauteur sous laquelle la couche limite apparaît, LS la ligne de stagnation et S le point de stagnation. Nous supposons en outre que les hypothèses suivantes sont satisfaites:

HP1 la ligne de stagnation LS coupe orthogonalement le choc;

HP2 la diffusion des espèces chimiques est négligeable.

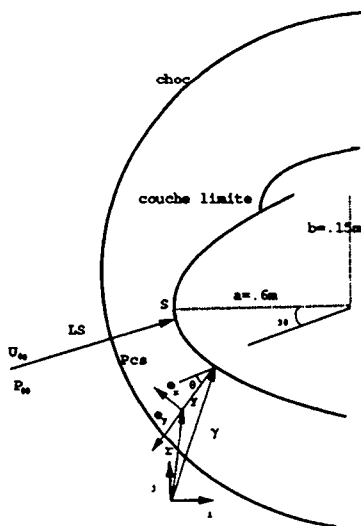


Figure 1

Lorsque l'on se propose d'étudier numériquement l'écoulement de l'air dans une zone située entre le choc et le corps dans le cadre de la théorie de la couche limite, nous devons déterminer la vitesse $\vec{V} = (u, v)^T$, la température T , le vecteur des fractions massiques des espèces constituant l'air \vec{Y} , la pression P et la densité ρ . Nous renvoyons le lecteur au chapitre 1 pour le modèle physique. Il est nécessaire de connaître la valeur de la vitesse, de la température, et (éventuellement) des fractions massiques, sur le bord supérieur de la couche limite, sur le corps et sur toute la hauteur de la couche limite pour une abscisse

donnée. Il est aussi nécessaire de connaître la pression sur le bord supérieur de la couche limite. Cette nécessité résulte de l'ensemble des équations paraboliques, ou hyperboliques que l'on doit résoudre, voir par exemple dans le cas où le corps est une plaque plane le système d'équations (1.4.13),..., (1.4.20). Les valeurs de la vitesse, de la température, (éventuellement) des fractions massiques, et de la pression sur le bord supérieur de la couche limite sont obtenues à partir des équations d'Euler.

Position du problème.

Plus précisément, fixons $x_0 > 0$, tel que $x_0 \ll 1$, on note Q le domaine $(x_0, X) \times (0, \delta)$. L'abscisse curviligne sur le corps égale à zéro est située au point de stagnation S . On suppose que le corps est délimité par une courbe régulière d'abscisse curviligne x . On note \vec{n} la normale au corps, y la distance au corps, \vec{r} le rayon vecteur, et $\vec{\gamma}$ le vecteur atteignant le "pied" de la normale sur le corps (voir figure 1). On a: $\vec{r}(x, y) = \vec{\gamma}(x) + y\vec{n}(x)$. On définit le repère curviligne orthonormal lié au corps en un point (x, y) par: $\vec{e}_x = \frac{\partial_x \vec{r}}{\|\partial_x \vec{r}\|}$; $\vec{e}_y = \vec{n}$.

Les équations que satisfont les composantes de la vitesse moyenne $\vec{V} = (u, v)^T$ dans le repère (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , la température T , le vecteur des fractions massiques des espèces constituant le fluide \vec{Y} , et la pression P s'écrivent (voir par exemple Williams [7] équations (17), (16), (18), (19) avec $R = 1$ p. 490-491 ou Boillat [3]):

$$\rho(T, P, \vec{Y})[u\partial_x u + v\partial_y u] - \partial_y(\mu(T, P, \vec{Y})\partial_y u) = -\partial_x P \text{ dans } Q; \quad (6.1.1)$$

$$\partial_x(\rho(T, P, \vec{Y})u) + \partial_y(\rho(T, P, \vec{Y})v) = 0 \text{ dans } Q; \quad (6.1.2)$$

$$\begin{aligned} \rho(T, P, \vec{Y})[u\partial_x h(T, \vec{Y}) + v\partial_y h(T, \vec{Y})] - \partial_y(\lambda(T, P, \vec{Y})\partial_y T) = \\ u\partial_x P + \mu(T, P, \vec{Y})(\partial_y u)^2 \text{ dans } Q; \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

$$u\partial_x \vec{Y} + v\partial_y \vec{Y} = \vec{\Omega}(T, P, \vec{Y}) \text{ dans } Q; \quad (6.1.4)$$

$$\partial_y P = 0 \text{ dans } Q; \quad (6.1.5)$$

avec les conditions aux limites données sur le corps par:

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0; T(x, 0) = T_c(x); x_0 < x \leq X; \quad (6.1.6)$$

les conditions aux limites données sur le bord extérieur de la couche limite par:

$$u(x, \delta) = U_e(x); T(x, \delta) = T_e(x); P(x) = P_e(x); x_0 < x \leq X; \quad (6.1.7)$$

$$\text{si } v(x, \delta) < 0 \text{ on doit donner } \vec{Y}(x, \delta) = \vec{Y}_e(x), x_0 < x \leq X; \quad (6.1.8)$$

et les conditions "initiales" en x_0 ; où nous devons nous donner:

$$\begin{aligned} u(x_0, y) = u_0(y) > 0, \text{ pour } y > 0, v(x_0, y) = v_0(y), T(x_0, y) = T_0(y) > 0, \\ \vec{Y}(x_0, y) = \vec{Y}_0(y) \text{ pour } 0 \leq y \leq \delta. \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

La densité ρ et l'enthalpie h sont des fonctions de T, P, \vec{Y} définies par:

$$\rho(T, P, \vec{Y}) = \frac{P}{R_0 T} \left(\sum_{k=1}^N \frac{Y_k}{W_k} \right)^{-1}; \quad (6.1.10)$$

$$h(T, \vec{Y}) = \sum_{k=1}^N Y_k h_k(T). \quad (6.1.11)$$

Dans les équations précédentes h_k désigne l'enthalpie massique de l'espèce k et a été définie au chapitre 1 cf (1.2.3), W_k sa masse molaire; μ désigne la viscosité de l'air et λ désigne la conductivité thermique de l'air et ont été définies à la section 3 du chapitre 1; $\tilde{\Omega}$ désigne le taux de production massique des espèces dans le cas de l'air et a été défini au chapitre 2 en (2.0.36) (nous omettons ici l'indice z).

Les quantités U_e, T_e, \vec{Y}_e, P_e représentent les traces sur le corps des fonctions qui sont solutions des équations d'Euler à l'extérieur du corps.

Vérifions que lorsque le corps est une plaque plane et que le fluide est de l'air, l'équation (6.1.4) est bien l'équation de conservation des espèces chimiques (équation (1.4.14)) particularisée lorsque la deuxième composante des vitesses de diffusion v_{k2} , sont nulles. En effet, posant $v_{k2} = 0$ dans l'équation (1.4.14) et en utilisant l'expression de ω_k donnée au chapitre 2 en (2.0.37) où $\frac{\bar{P}}{\sum_{k=1}^N \rho_k}$ est exprimée comme une fonction de \vec{Y} (à savoir, $\frac{\bar{P}}{\sum_{k=1}^N \rho_k} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{Y}$), nous obtenons l'équation (6.1.4).

Dans les équations (6.1.1), ..., (6.1.11), les champs inconnus $(u, v)^T, T, \vec{Y}$ sont des fonctions des variables (x, y) , alors que P ne dépend que de x . Il est à noter que la pression est donc une fonction connue égale à P_e . Donnons la méthode que nous avons utilisée pour déterminer les quantités U_e, T_e, \vec{Y}_e, P_e qui représentent les traces des solutions des équations d'Euler sur le corps.

Calcul des conditions aux limites.

Dans les exemples que nous présentons par la suite, la pression est déterminée par la théorie Newtonnienne (cf Anderson [1] pages 53-54):

$$P_e(x) = P_\infty + (P_{e_s} - P_\infty) \sin^2 \theta(x),$$

où θ désigne l'angle que font la normale au corps et la direction de l'écoulement à l'infini amont (cf figure 1), et où P_{e_s} désigne la pression sur la ligne de stagnation immédiatement après le choc.

Lorsque la pression est connue, nous calculons U_e, T_e, \vec{Y}_e comme les solutions des équations suivantes:

$$\rho(T_e(x), P_e(x), \vec{Y}_e(x)) U_e(x) \frac{dU_e}{dx}(x) = -\frac{dP_e}{dx}(x); \quad (6.1.12)$$

$$\rho((T_e(x), P_e(x), \vec{Y}_e(x)) U_e(x) \frac{dh(T_e, \vec{Y}_e)}{dx}(x) = U_e(x) \frac{dP_e}{dx}(x); \quad (6.1.13)$$

$$U_e(x) \frac{d\vec{Y}_e}{dx}(x) = \tilde{\Omega}(T_e(x), P_e(x), \vec{Y}_e(x)); \quad (6.1.14)$$

avec $U_e(0) = 0$, $T_e(0) = T(S)$ la température au point de stagnation, $\vec{Y}_e(0) = \vec{C}^*(T_e(0), P_\infty, \vec{M})$, le vecteur des fractions massiques à l'équilibre chimique (défini au chapitre 2, lemme 2.3.1), où $\vec{M} = (c_1, c_2)^T$ avec $c_1 = .769, c_2 = .231$. Les valeurs de c_1 et de c_2 que nous utilisons sont les valeurs usuelles pour les proportions atomiques d'atomes d'azote et d'oxygène dans l'air.

Remarques 6.1.1.

• L'origine de l'abscisse curviligne $x = 0$ est située au point de stagnation S pour les raisons suivantes:

- i) les équations dégénèrent sur la ligne de stagnation puisque $u = 0$;
- ii) néanmoins, si le point de stagnation S est à l'équilibre chimique, alors de l'hypothèse HP1 et des propriétés de conservation sur la ligne de stagnation, on déduit la température au point d'arrêt S cf [1];
- iii) supposant que les équations de la couche limite sont encore valides dans cette région, sous des hypothèses raisonnables, on peut résoudre la dégénérescence des équations (6.1.1),..., (6.1.6) sur la ligne de stagnation LS et ainsi connaître les champs U, T, \vec{Y} sur la ligne de stagnation.

• La ligne de stagnation LS est une ligne de courant, et la vitesse atteint son infimum en valeur absolue sur cette ligne de courant. L'énergie se conserve sur les lignes de courant, la pression varie peu entre le choc et le corps et l'énergie cinétique est faible. On en déduit que la température sera élevée. Il y aura donc un important flux de chaleur, c'est pourquoi il est intéressant d'étudier précisément cette zone sur un plan thermique.

Remarques 6.1.2.

- i) Lorsque l'hypothèse de la chimie à l'équilibre est satisfaite, l'équation (6.1.4) peut être remplacée par les conditions d'optimalité (2.3.2) i), ii) obtenues au chapitre 2, encore appelées lois d'action de masses. Ces relations se traduisent par un système d'équations algébriques que l'on note symboliquement $\vec{Y} = \Gamma(T, P, \vec{Y})$. De plus la condition à la limite (6.1.8) est alors supprimée.
- ii) dans le cas d'un corps axisymétrique, l'équation (6.1.2) est remplacée par:

$$\partial_x(\rho(T, P, \vec{Y})Ru) + \partial_y(\rho(T, P, \vec{Y})Rv) = 0 \text{ dans } Q;$$

où R est une fonction qui dépend de x uniquement et qui représente la distance, du point d'abscisse x situé sur le corps, à l'axe de symétrie.

Maintenant, donnons le plan de ce chapitre. A la section 2, nous présentons une méthode pour calculer les conditions "initiales" au voisinage de la ligne de stagnation pour les fonctions $(u, v)^T, T, \vec{Y}$. A la section 3, nous décrivons l'algorithme que nous proposons pour résoudre numériquement les équations (6.1.1),..., (6.1.11) lorsque les réactions sont à l'équilibre chimique, et à la section 4 nous considérons le cas où les réactions sont hors-équilibre. Ces algorithmes sont fondés sur une méthode de marche dans la direction des

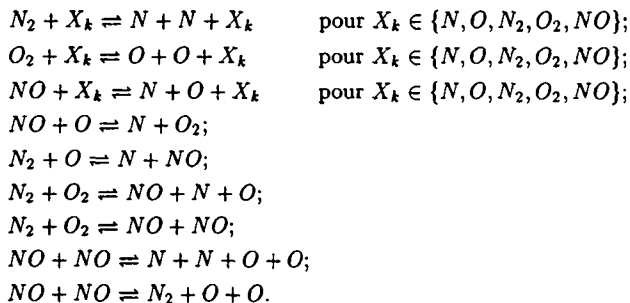
x positifs, ce qui permet de découpler et de "linéariser" les différents problèmes. Pour cela nous utilisons les valeurs des inconnues calculées au pas précédent dans les termes de couplage et dans les termes non linéaires. Nous montrons aussi que le problème permettant de calculer les fractions massiques des espèces chimiques est numériquement bien posé à chaque pas dans le cas où les réactions ne sont pas à l'équilibre chimique. Finalement à la section 5, nous présentons quelques exemples numériques que nous avons traités. La fin de cette introduction est consacrée à la description des réactions chimiques qui sont prises en compte dans le cas de l'air.

Réactions chimiques considérées dans le cas de l'air.

Nous supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites:

HP3 i) l'air est un mélange de gaz parfaits et constitué des cinq espèces chimiques suivantes: $Z \stackrel{\text{def}}{=} \{N, O, N_2, O_2, NO\}$.

HP3 ii) seules les vingt et une réactions chimiques suivantes se produisent:



et se trouvent dans un voisinage de l'équilibre chimique.

Nous supposons de plus que l'hypothèse HP3 du chapitre 2 concernant les potentiels chimiques des espèces chimiques est satisfaite.

Maintenant, écrivons les relations de conservation des atomes, c'est-à-dire $\tilde{\Omega} \in \ker A^z$ (cf lemme 2.3.3) où A^z représente la matrice stoechiométrique (voir 2.1.2 pour une définition précise) et est donnée par:

$$A^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{W_{N_2}}{2W_{NO}} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{W_{O_2}}{2W_{NO}} \end{pmatrix};$$

où W_l pour $l \in Z$ désigne les masses molaires des espèces. Nous avons:

$$\Omega_N + \Omega_{N_2} + \frac{W_{N_2}}{2W_{NO}} \Omega_{NO} = 0; \quad (6.1.15)$$

$$\Omega_O + \Omega_{O_2} + \frac{W_{O_2}}{2W_{NO}} \Omega_{NO} = 0; \quad (6.1.16)$$

où les composantes du vecteur de production $\tilde{\Omega}$ sont notées Ω_k , pour $k = N, O, N_2, O_2, NO$

. L'absence de diffusion des espèces chimiques et les relations de conservation des atomes ((6.1.15),(6.1.16)) impliquent que sur les lignes de courant les relations suivantes sont vérifiées:

$$Y_N + Y_{N_2} + \frac{W_{N_2}}{2W_{NO}} Y_{NO} = c_1; \quad (6.1.17)$$

$$Y_O + Y_{O_2} + \frac{W_{O_2}}{2W_{NO}} Y_{NO} = c_2; \quad (6.1.18)$$

où c_1, c_2 sont des constantes. L'uniformité du milieu à l'infini amont implique que les relations (6.1.17),(6.1.18) sont vérifiées partout.

Nous prendrons ces constantes égales à .769 pour c_1 et .231 pour c_2 , ce qui est habituel dans le cas de l'air. Les relations ci-dessous sont donc vérifiées dans \bar{Q} :

$$Y_N + Y_{N_2} + \frac{W_{N_2}}{2W_{NO}} Y_{NO} = .769; \quad (6.1.19)$$

$$Y_O + Y_{O_2} + \frac{W_{O_2}}{2W_{NO}} Y_{NO} = .231. \quad (6.1.20)$$

Remarquons que les relations (6.1.15), (6.1.16) impliquent: $\sum_{k=1}^N Y_k = 1$.

Cas de la chimie à l'équilibre.

Maintenant, nous considérons le cas où les réactions chimiques sont à l'équilibre. Il s'agit d'obtenir en plus de (6.1.19),(6.1.20) trois autres équations des conditions d'optimalité (2.3.2) i).

Les vecteurs de formation des espèces $\tilde{f}_{N_2}^i, \tilde{f}_{O_2}^i, \tilde{f}_{NO}^i$ sont donnés par (2.1.4), ils s'écrivent:

$$\tilde{f}_{N_2}^i = (-1, 0, 1, 0, 0)^T; \quad \tilde{f}_{O_2}^i = (0, -1, 0, 1, 0)^T; \quad \tilde{f}_{NO}^i = \left(-\frac{W_{N_2}}{2W_{NO}}, -\frac{W_{O_2}}{2W_{NO}}, 0, 0, 1\right)^T.$$

On écrit alors la condition (2.3.2) i) soit:

$$-\mu_N^i(T, P, \bar{Y}) + \mu_{N_2}^i(T, P, \bar{Y}) = 0; \quad (6.1.21)$$

$$-\mu_O^i(T, P, \bar{Y}) + \mu_{O_2}^i(T, P, \bar{Y}) = 0; \quad (6.1.22)$$

$$-\frac{W_{N_2}}{2W_{NO}} \mu_N^i(T, P, \bar{Y}) - \frac{W_{O_2}}{2W_{NO}} \mu_O^i(T, P, \bar{Y}) + \mu_{NO}^i(T, P, \bar{Y}) = 0. \quad (6.1.23)$$

où μ_k^i désigne les potentiels chimiques des espèces.

On utilise les expressions (2.0.32) du chapitre 2 pour les potentiels chimiques μ_k^i , lorsque les fonctions $\xi_k(T)$ données par:

$$\xi_k(T) \stackrel{\text{def}}{=} h_k(T) - T \int_{T_0}^T \frac{C_{p,k}(\tau)}{\tau} d\tau + T\tilde{C}_{0,k}, \text{ pour } k \in \{N, O, N_2, O_2, NO\}.$$

sont remplacées par des approximations polynômiales $\Phi_k(T)$.

On trouvera les expressions des fonctions $\Phi_k(T)$ dans Boillat-Pousin [2] ou dans Eldem [6] par exemple,

Les relations (6.1.21) à (6.1.23) se transforment en:

$$Y_{N_2} = Y_N^2 \frac{P}{\sum_{k=1}^5 \frac{Y_k}{W_k}} \exp \left\{ \frac{W_{N_2}}{R_0 T} \{ \Phi_N(T) - \Phi_{N_2}(T) \} \right\} \frac{W_{N_2}}{W_N^2}; \quad (6.1.24)$$

$$Y_{O_2} = Y_O^2 \frac{P}{\sum_{k=1}^5 \frac{Y_k}{W_k}} \exp \left\{ \frac{W_{O_2}}{R_0 T} \{ \Phi_O(T) - \Phi_{O_2}(T) \} \right\} \frac{W_{O_2}}{W_O^2}; \quad (6.1.25)$$

$$Y_{NO} = \sqrt{Y_{N_2} Y_{O_2}} \frac{W_{NO}}{\sqrt{W_{N_2} W_{O_2}}} \exp \left\{ - \frac{1}{R_0 T} \{ W_{O_2} \Phi_{O_2}(T) + W_{N_2} \Phi_{N_2}(T) - W_{NO} \Phi_{NO}(T) \} \right\}. \quad (6.1.26)$$

Dans le cas de la chimie à l'équilibre nous avons donc obtenu un système de cinq équations (6.1.19), (6.1.20), (6.1.24), (6.1.25), (6.1.26) pour les cinq inconnues $Y_N, Y_O, Y_{N_2}, Y_{O_2}, Y_{NO}$.

6.2. Conditions initiales.

Pour plus de clarté, nous présentons la méthode de calcul des conditions "initiales" en $x = x_0$ pour $(u, v)^T, T, \bar{Y}$ dans le cas d'un écoulement incompressible avec une viscosité μ constante. On ne considère que les deux premières équations (6.1.1) et (6.1.2) où ρ est une constante égale à un. Ce système (P_{in}) s'écrit:

$$\begin{aligned} [u\partial_x u + v\partial_y u] - \partial_y(\mu\partial_y u) &= -\partial_x P \text{ dans } Q; \\ \partial_x u + \partial_y v &= 0 \text{ dans } Q; \\ u(x, 0) = v(x, 0) &= 0; \quad u(x, \delta) = U_e(x) \text{ pour } x \geq 0. \end{aligned}$$

On suppose que les équations de la couche limite ci-dessus sont valides dans le domaine $(0, X) \times (0, \delta)$. Soit x_0 fixé, le profil v_0 de v en x_0 se déduira du profil u_0 de u en x_0 de la manière suivante. A l'aide de la deuxième équation du système ci-dessus, on élimine $\partial_x u$ de première équation qui s'écrit alors:

$$\begin{aligned} -u_0 \frac{dv_0}{dy} + v_0 \frac{du_0}{dy} &= \mu \frac{d^2 u_0}{dy^2} + U_e(x_0) \frac{dU_e}{dx}(x_0); \text{ pour } 0 \leq y \leq \delta; \\ v_0(0) &= 0; \end{aligned}$$

En vertu des résultats de régularité donnés par le théorème 3 p. 22 de Oleinik [7], on a que $\frac{v}{u} \rightarrow 0$ lorsque $y \rightarrow 0$. On exprime la fonction v_0 de classe C^1 solution de l'équation précédente par:

$$v_0(y) = \int_0^y \frac{u_0(s)}{u_0^2(s)} \left(U_e(x_0) \frac{dU_e}{dx}(x_0) + \mu \frac{d^2 u_0(s)}{dy^2} \right) ds.$$

On calculera numériquement v_0 à partir de cette expression.

Reste à calculer $u_0(y)$. Pour ce faire, nous supposons que l'hypothèse de Dordnitsyn-Mangler est satisfaite:

HP4

$\exists X_1 > 0, \exists Z \in C^{1,2}([0, X_1] \times [0, \delta])$ telle que

$$u(x, y) = U_e(x)Z(x, y), \text{ avec } Z(0, y) \neq 0, \forall y \in (0, \delta], \forall x \in [0, X_1]; \text{ et } Z(0, 0) = 0.$$

Puisque $U_e(0) = 0$ on a $\partial_x u(0, y) = U_e'(0)Z(0, y)$. Si on pose

$$Z_0(y) \stackrel{\text{def}}{=} Z(0, y); \quad v_1(y) \stackrel{\text{def}}{=} v(0, y)$$

les équations du système (P_{in}) s'écrivent:

$$\begin{aligned} U_e'(0)Z_0^2 + v_1 Z_0' - \mu Z_0'' &= U_e'(0); \text{ dans } (0, \delta) \\ U_e'(0)Z_0 + v_1' &= 0; \text{ dans } (0, \delta) \\ Z_0(0) = v_1(0) &= 0; \quad Z_0(\delta) = 1. \end{aligned}$$

On résout numériquement ces équations pour obtenir Z_0 et v_1 . On prend alors l'approximation suivante pour u_0 :

$$u_0(y) \stackrel{\text{def}}{=} x_0 \partial_x u(0, y) = x_0 U'_e(0) Z(y) \text{ pour } 0 \leq y \leq \delta.$$

Pour le cas d'un fluide réactif nous utilisons la même démarche. Connaissant u_0, T_0, \bar{Y}_0 , en $x = x_0$ pour $0 \leq y \leq \delta$, nous calculons v_0 à l'aide de l'équation (6.1.1) lorsque $\partial_x T_0, \partial_x \bar{Y}_0$ sont exprimées à partir des équations (6.1.3) et (6.1.4) écrites en $x = x_0$ (ce qui est possible si $u_0(y) > 0$ pour $y > 0$).

Pour calculer $T_0(y), Z_0(y), \bar{Y}_0(y)$ nous résoudrons numériquement la dégénérescence des équations (6.1.1), ..., (6.1.8) sur la ligne de stagnation, équations qui s'écrivent:

$$\begin{aligned} & \rho(T_0, P_\infty, \bar{Y}_0) \left[Z_0^2 U'_e(0) + v_1 \frac{dZ_0}{dy} \right] - \\ & \frac{d}{dy} (\mu(T_0, P_\infty, \bar{Y}_0) \frac{dZ_0}{dy}) = \rho(T_0, P_\infty, \bar{Y}_0) U'_e(0), \quad 0 < y \leq \delta; \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

$$U'_e(0) Z_0 \rho(T_0, P_\infty, \bar{Y}_0) + v_1 \frac{d\rho(T_0, P_\infty, \bar{Y}_0)}{dy} + \rho(T_0, P_\infty, \bar{Y}_0) \frac{dv_1}{dy} = 0, \quad 0 < y \leq \delta; \quad (6.2.2)$$

$$\begin{aligned} & \rho(T_0, P_\infty, \bar{Y}_0) v_1 \left[\partial_T h(T_0, \bar{Y}_0) \frac{dT_0}{dy} + \partial_{\bar{Y}} h(T_0, \bar{Y}_0) \frac{d\bar{Y}_0}{dy} \right] - \\ & \frac{d}{dy} (\lambda(T_0, P_\infty, \bar{Y}_0) \frac{dT_0}{dy}) = 0; \quad 0 < y \leq \delta; \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

$$v_1 \frac{d\bar{Y}_0}{dy} = \bar{\Omega}(T_0, P_\infty, \bar{Y}_0); \quad 0 < y \leq \delta. \quad (6.2.4)$$

Les conditions aux limites sont:

$$Z_0(0) = v_1(0) = 0, \quad T_0(0) = T_c(S), \quad T_0(\delta) = T_c(S), \quad Z_0(\delta) = 1, \quad \bar{Y}_0(\delta) = \bar{Y}_e(S), \quad (6.2.5)$$

et les fonctions ρ et h des variables T, P, \bar{Y} sont données par:

$$\rho(T_0, P_s, \bar{Y}_0) = \frac{P_s}{R_0 T_0} \left(\sum_{k \in Z} \frac{Y_{0k}}{W_k} \right)^{-1}; \quad (6.2.6)$$

$$h(T_0, \bar{Y}_0) = \sum_{k \in Z} Y_{0k} h_k(T_0). \quad (6.2.7)$$

Pour calculer Z_0, v_1, T_0, \bar{Y}_0 nous utilisons le procédé de point fixe suivant:

- on se donne $v_1^j, T_0^j, \bar{Y}_0^j$ pour $j = 1$;
- on calcule alors Z_0^{j+1} comme la solution de l'équation (6.2.1) dans laquelle on a remplacé v_1, T_0, \bar{Y}_0 par $v_1^j, T_0^j, \bar{Y}_0^j$;

- puis on calcule T_0^{j+1} comme la solution de l'équation (6.2.3) où v_1, \vec{Y}_0 sont remplacés par v_1^j, \vec{Y}_0^j et où T_0 est remplacé par T_0^j dans la fonction λ ;
- on calcule alors \vec{Y}_0^{j+1} comme la solution de l'équation non linéaire (6.2.4) dans laquelle on a remplacé v_1 par v_1^j . Pour ce faire on utilise une méthode de point fixe de Picard;
- finalement, on calcule v_1^{j+1} comme la solution de l'équation (6.2.2).

Nous avons ainsi effectué une itération sur le système complet. Nous répétons ces itérations jusqu'à convergence.

Dans le cas de la chimie à l'équilibre, l'équation (6.2.4) est remplacée par un système algébrique de cinq équations formé de (6.1.19), (6.1.20), (6.1.24), ..., (6.1.26) que l'on note

$$\vec{Y}_0 = \Gamma(T_0, P_\infty, \vec{Y}_0). \quad (6.2.8)$$

6.3. Algorithme pour résoudre les équations de la couche limite à l'équilibre.

L'algorithme que nous proposons pour résoudre numériquement les équations (6.1.1), (6.1.2), (6.1.3), (6.1.5), (6.1.19), (6.1.20), (6.1.24), ..., (6.1.26), avec les conditions aux limites (6.1.6), ..., (6.1.11) (où on ne prend pas en compte les conditions concernant la fonction \bar{Y}) est fondé sur les remarques suivantes:

- i) tant que $u > 0$ si le système formé des équations (6.1.1), (6.1.3) est parabolique, on peut utiliser une méthode de marche dans la direction des x croissants;
- ii) les équations sont découplées en utilisant les valeurs des inconnues à l'abscisse précédente.

Remarquons que la propriété "l'équation (6.1.3) est parabolique" n'est vraie que si λ est minorée par une constante positive et que si $\partial_T h(T, \bar{Y})$ est minorée par une constante positive. Si nous écrivons l'enthalpie massique h comme une fonction de la température et de la pression $H(T, P)$ (ce qui est possible puisque les fractions massiques sont des fonctions de la température et de la pression), montrons que la propriété (P_r) suivante est vraie.

Pour tout compact K de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$, il existe une constante $\gamma > 0$ telle que:

$$\partial_T H(T, P) \stackrel{\text{def}}{=} C_P(T, P) \geq \gamma \text{ pour tout } (T, P) \in K.$$

Preuve. De l'existence d'une fonction d'entropie comme une fonction de la masse, de l'énergie interne et du volume, nous en déduisons lorsque la masse est fixée une fonction d'entropie par unité de masse $S(H, P)$, comme une fonction de l'enthalpie et de la pression. La fonction S est deux fois dérivable par rapport à ses arguments et est concave par rapport à H . De plus la température est reliée à S par:

$$\partial_H S(H, P) = \frac{1}{T}. \quad (6.3.1)$$

Pour prouver que la propriété (P_r) est vraie, raisonnons *ab absurdo*. Puisque K est compact, il existe $T^*, P^* \in K$ tels que $0 \geq C_P(T^*, P^*)$. De la relation (6.3.1) nous déduisons:

$$\partial_{HH}^2 S(H, P) = -\frac{1}{T^2} \frac{1}{\partial_T H(T, P)} = -\frac{1}{T^2} \frac{1}{C_P(T, P)}.$$

Si $C_P(T^*, P^*) < 0$, alors les égalités précédentes contredisent la concavité de la fonction S par rapport à H ; si $C_P(T^*, P^*) = 0$ elles contredisent la dérivabilité de la fonction S . Ainsi nous avons prouvé la propriété (P_r) .

□

L'équation (6.1.3) est une équation pour la température, et nous utilisons l'expression suivante pour évaluer la dérivée de l'enthalpie h , par rapport à la température:

$$\frac{d}{dT} h(T, \bar{Y}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in Z} Y_k(T, P) \partial_T h_k(T) + h_k(T) \partial_T Y_k(T, P),$$

ce qui conduit à l'équation suivante pour la température T :

$$\rho \frac{d}{dT} h(T, \bar{Y}) \bar{V}^T \nabla T - \partial_y (\lambda \partial_y T) = u \partial_x P \left[1 - \rho \sum_{k \in Z} h_k(T) \partial_P Y_k(T, P) \right] + \mu (\partial_y u)^2. \quad (6.3.2)$$

Remarquons qu'au chapitre 2 nous avons montré que les fractions massiques à l'équilibre chimique étaient des fonctions dérivables par rapport à la température et à la pression (cf lemme 2.3.2).

problème approché.

Soit $N > 0$ donné, on pose $\tau = \frac{X - x_0}{N}$, et on définit les points x_i par: $x_i = i\tau + x_0$; $1 \leq i \leq N$. Ainsi l'intervalle $[x_0, X]$ est divisé en N sous-intervalles I_n , avec $I_n = (x_{n-1}, x_n)$ pour $1 \leq n \leq N$.

Soit $m > 0$ donné, on pose $h = \frac{\delta}{m+1}$, et on définit les points y_j par: $y_j = jh$, pour $0 \leq j \leq m+1$. Ainsi l'intervalle $[0, \delta]$ est divisé en $m+1$ sous-intervalles J_j avec $J_j = [y_j, y_{j+1}]$ pour $0 \leq j \leq m$.

Introduisons maintenant quelques notations. Nous noterons par $U_j^n, V_j^n, T_j^n, P^n, \bar{Y}_j^n \stackrel{\text{def}}{=} (Y_{Nj}^n, \dots, Y_{NOj}^n)^T$ des approximations de u, v, T, P, \bar{Y} aux points (x_n, y_j) et nous noterons $\Delta_T \bar{Y}(T_j^n, P^{n+1}), \Delta_P \bar{Y}(T_j^n, P^{n+1})$ des approximations de la dérivée de \bar{Y} par rapport à T ou à P à l'abscisse x_n et au point y_j . Pour $0 \leq n \leq N$; et pour $0 \leq j \leq m+1$. Nous désignons par:

$$\rho_j^n, C_{pj}^n, \mu_j^n, \lambda_j^n, \text{ et } h_{kj}^n$$

les quantités suivantes:

$$\begin{aligned} \rho_j^n &\stackrel{\text{def}}{=} \rho(P^{n+1}, T_j^n, \bar{Y}_j^n), C_{pj}^n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in Z} Y_{kj}^n \partial_T h_k(T_j^n) + h_k(T_j^n) \Delta_T Y_k(T_j^n, P^{n+1}), \\ \mu_j^n &\stackrel{\text{def}}{=} \mu(P^{n+1}, T_j^n, \bar{Y}_j^n), \lambda_j^n \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(P^{n+1}, T_j^n, \bar{Y}_j^n), \text{ et } h_{kj}^n \stackrel{\text{def}}{=} h_k(T_j^n). \end{aligned}$$

L'algorithme s'écrit:

• Soit $\{U_j^n\}_{j=0}^{m+1}, \{V_j^n\}_{j=0}^{m+1}, \{T_j^n\}_{j=0}^{m+1}, \{\bar{Y}_j^n\}_{j=0}^{m+1}, \{\Delta_T \bar{Y}(T_j^n, P^1)\}_{j=0}^{m+1}, \{\Delta_P \bar{Y}(T_j^n, P^1)\}_{j=0}^{m+1}$ donnés;

supposons connus $\{U_j^n > 0\}_{j=0}^{m+1}, \{V_j^n\}_{j=0}^{m+1}, \{T_j^n\}_{j=0}^{m+1}, \{\bar{Y}_j^n\}_{j=0}^{m+1}, \{\Delta_T \bar{Y}(T_j^n, P^{n+1})\}_{j=0}^{m+1}, \{\Delta_P \bar{Y}(T_j^n, P^{n+1})\}_{j=0}^{m+1}$ pour $n > 0$;

• on calcule une approximation de la vitesse tangentielle $\{U_j\}_{j=0}^{m+1}$ comme la solution de:

$$\begin{aligned} \rho_j^n \left[U_j^n \frac{U_j - U_j^n}{\tau} + (V_j^n)^+ \frac{U_j - U_{j-1}}{h} - (V_j^n)^- \frac{U_{j+1} - U_j}{h} \right] - \frac{1}{h} \left\{ \frac{\mu_{j+1}^n + \mu_j^n}{2} \frac{U_{j+1} - U_j}{h} - \frac{\mu_{j-1}^n + \mu_j^n}{2} \frac{U_j - U_{j-1}}{h} \right\} &= - \frac{P^{n+1} - P^n}{\tau}; \text{ pour } 1 \leq j \leq m \\ U_0 &= 0; \quad U_{m+1} = U_e(x_{n+1}). \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Dans ce qui précède, $V_j^+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|V_j| + V_j}{2}$, $V_j^- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|V_j| - V_j}{2}$, c'est-à-dire la partie positive, respectivement négative de V_j .

- on calcule une approximation de la température $\{T_j\}_{j=0}^{m+1}$ comme la solution de:

$$\begin{aligned} & \rho_j^n C_{p_j}^n \left[U_j \frac{T_j - T_j^n}{\tau} + (V_j^n)^+ \frac{T_j - T_{j-1}}{h} - (V_j^n)^- \frac{T_{j+1} - T_j}{h} \right] - \frac{1}{h} \left\{ \frac{\lambda_{j+1}^n + \lambda_j^n}{2} \frac{T_{j+1} - T_j}{h} - \right. \\ & \left. \frac{\lambda_{j-1}^n + \lambda_j^n}{2} \frac{T_j - T_{j-1}}{h} \right\} = \left[U_j - \rho_j^n \sum_{k \in Z} h_{k_j}^n \partial_P Y_k(T_j^n, P^{n+1}) \right] \frac{P^{n+1} - P^n}{\tau} + \\ & \mu_j^n \left[\left(\frac{U_{j+1} - U_j}{h} \right)^2 + \left(\frac{U_j - U_{j-1}}{h} \right)^2 \right]; \text{ pour } 1 \leq j \leq m \\ & T_0 = T_c(x_{n+1}); \quad T_{m+1} = T_e(x_{n+1}); \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

- on calcule une approximation des fractions massiques $\{\bar{Y}_j\}_{j=0}^{m+1} = \{Y_{N_j}, \dots, Y_{NO_j}\}_{j=0}^{m+1}$ comme les solutions de:

$$\begin{aligned} & Y_{N_j} + Y_{N_{2j}} + \frac{W_{N_2}}{2W_{NO}} Y_{NO_j} = .769; \\ & Y_{O_j} + Y_{O_{2j}} + \frac{W_{O_2}}{2W_{NO}} Y_{NO_j} = .231; \\ & Y_{N_{2j}} = Y_{N_j}^2 \frac{P^{n+1}}{\sum_{k \in Z} \frac{Y_{k_j}}{W_k}} \exp \left\{ \frac{W_{N_2}}{R_0 T} \{ \Phi_N(T_j) - \Phi_{N_2}(T_j) \} \right\} \frac{W_{N_2}}{W_N^2}; \\ & Y_{O_{2j}} = Y_{O_j}^2 \frac{P^{n+1}}{\sum_{k \in Z} \frac{Y_{k_j}}{W_k}} \exp \left\{ \frac{W_{O_2}}{R_0 T} \{ \Phi_O(T_j) - \Phi_{O_2}(T_j) \} \right\} \frac{W_{O_2}}{W_O^2}; \\ & Y_{NO_j} = \sqrt{Y_{N_{2j}} Y_{O_{2j}}} \frac{W_{NO}}{\sqrt{W_{N_2} W_{O_2}}} \exp \left\{ - \frac{1}{R_0 T_j} \right. \\ & \left. \{ W_{O_2} \Phi_{O_2}(T_j) + W_{N_2} \Phi_{N_2}(T_j) - W_{NO} \Phi_{NO}(T_j) \} \right\}; \text{ pour } 0 \leq j \leq m+1; \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Si on note symboliquement le système (6.3.5) $\bar{Y}_j = \Gamma(T_j, P^{n+1}, \bar{Y}_j)$, on calcule alors simultanément une approximation de la dérivée de \bar{Y} par rapport à P $\Delta_P \bar{Y}(T_j, P^{n+1})$ comme la solution de

$$\Delta_P \bar{Y}(T_j, P^{n+1}) = \Gamma(T_j, 1, \Delta_P \bar{Y}(T_j, P^{n+1})).$$

- on note $\Delta_T \bar{Y}_j$ pour $\Delta_T \bar{Y}(T_j, P^{n+1})$ une approximation de la dérivée de \bar{Y} par rapport

à T , et on calcule $\{\Delta_T \bar{Y}_j\}_{j=1}^{m+1} = \{\Delta Y_{N_j}, \dots, \Delta Y_{NO_j}\}_{j=0}^{m+1}$ comme les solutions de:

$$\begin{aligned} \Delta_T Y_{N_j} + \Delta_T Y_{N_{2j}} + \frac{W_{N_2}}{2W_{NO}} \Delta_T Y_{NO_j} &= 0; \\ \Delta_T Y_{O_j} + \Delta_T Y_{O_{2j}} + \frac{W_{O_2}}{2W_{NO}} \Delta_T Y_{NO_j} &= 0; \\ \Delta_T Y_{N_{2j}} &= \Delta_T Y_{N_j}^2 \frac{P^{n+1}}{\sum_{k \in Z} \frac{\Delta_T Y_{k_j}}{W_k}} \exp \left\{ \frac{W_{N_2}}{R_0 T} \{ \Phi'_N(T_j) - \Phi'_{N_2}(T_j) \} \right\} \frac{W_{N_2}}{W_N^2}; \\ \Delta_T Y_{O_{2j}} &= \Delta_T Y_{O_j}^2 \frac{P^{n+1}}{\sum_{k \in Z} \frac{\Delta_T Y_{k_j}}{W_k}} \exp \left\{ \frac{W_{O_2}}{R_0 T} \{ \Phi'_O(T_j) - \Phi'_{O_2}(T_j) \} \right\} \frac{W_{O_2}}{W_O^2}; \\ \Delta_T Y_{NO_j} &= \sqrt{\Delta_T Y_{N_{2j}} \Delta_T Y_{O_{2j}}} \frac{W_{NO}}{\sqrt{W_{N_2} W_{O_2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{R_0 T_j} \right. \\ &\quad \left. \{ W_{O_2} \Phi'_{O_2}(T_j) + W_{N_2} \Phi'_{N_2}(T_j) - W_{NO} \Phi'_{NO}(T_j) \} \right\}; \text{ pour } 0 \leq j \leq m+1; \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

- on calcule la densité $\{\rho_j\}_{j=0}^{m+1}$ à l'aide de l'expression suivante:

$$\rho_j = \frac{P^{n+1}}{R_0 T_j} \left(\sum_{k \in Z} \frac{Y_{k_j}}{W_k} \right)^{-1}; 0 \leq j \leq m+1 \quad (6.3.7)$$

- finalement on calcule la vitesse normale $\{V_j\}_{j=0}^{m+1}$ comme la solution de:

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= \frac{1}{\rho_{j+1}} \left[\rho_j V_j - \frac{h}{\tau} \{ \rho_j U_j - \rho_j^n U_j^n \} \right]; \text{ pour } 1 \leq j \leq m \\ V_0 &= 0. \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

- On pose alors

$$\begin{aligned} \{U_j^{n+1}\}_{j=0}^{m+1} &\stackrel{\text{déf}}{=} \{U_j\}_{j=0}^{m+1}; \{V_j^{n+1}\}_{j=0}^{m+1} \stackrel{\text{déf}}{=} \{V_j\}_{j=0}^{m+1}; \{T_j^{n+1}\}_{j=0}^{m+1} \stackrel{\text{déf}}{=} \{T_j\}_{j=0}^{m+1}; \\ \{\bar{Y}_j^{n+1}\}_{j=0}^{m+1} &\stackrel{\text{déf}}{=} \{\bar{Y}_j\}_{j=0}^{m+1}; \{\rho_j^{n+1}\}_{j=0}^{m+1} \stackrel{\text{déf}}{=} \{\rho_j\}_{j=0}^{m+1}. \end{aligned}$$

Si $x_{n+1} \leq X$, on pose $n = n+1$ et on recommence le cycle (6.3.3), ..., (6.3.8).

Remarques.

Pour calculer les solutions des systèmes algébriques (6.3.5) et (6.3.6), on utilise un algorithme de Newton avec les valeurs des inconnues en n comme point de départ. De même, lorsqu'il s'agit de calculer la dérivée des fractions massiques par rapport à la pression, on utilise la même méthode de Newton.

Soit \mathbf{A} et \mathbf{T} les matrices tridiagonales définies par:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{h} \left[\frac{\mu_{j+1}^n + \mu_j^n}{2h} + \rho_j^n (V_j^n)^- \right] & \text{si } j = i + 1; \\ \rho_j^n \frac{U_j^n}{\tau} + \frac{1}{h} \left[\frac{\mu_{j+1}^n + \mu_j^n}{2h} + \frac{\mu_{j-1}^n + \mu_j^n}{2h} + |v_j^{n+1}| \right] & \text{si } j = i; \\ -\frac{1}{h} \left[\frac{\mu_{j-1}^n + \mu_j^n}{2h} + (V_j^n)^+ \right] & \text{si } j = i - 1; \\ 0 & \text{si } j \notin \{i-1, i, i+1\}; \end{cases} \quad 1 < i < m+1;$$

$$\mathbf{A}_{1j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}; \quad \mathbf{A}_{m+2j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = m+2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

et par

$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{h} \left[\frac{\lambda_{j+1}^n + \lambda_j^n}{2h} + \rho_j^n C_{p_j}^n (V_j^n)^- \right] & \text{si } j = i + 1; \\ \rho_j^n C_{p_j}^n \frac{U_j}{\tau} + \frac{1}{h} \left[\frac{\lambda_{j+1}^n + \lambda_j^n}{2h} + \frac{\lambda_{j-1}^n + \lambda_j^n}{2h} + |V_j^n| \right] & \text{si } j = i; \\ -\frac{1}{h} \left[\frac{\lambda_{j-1}^n + \lambda_j^n}{2h} + \rho_j^n C_{p_j}^n (V_j^n)^+ \right] & \text{si } j = i - 1; \\ 0 & \text{si } j \notin \{i-1, i, i+1\}; \end{cases} \quad 1 < i < m+1;$$

$$\mathbf{T}_{1j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}; \quad \mathbf{T}_{m+2j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = m+2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors tant que $\{U_j^n\}_{j=0}^{m+1}$ est une famille de nombres positifs, il est classique de vérifier que les matrices \mathbf{A} et \mathbf{T} sont régulières et monotones. En effet, il suffit pour cela de vérifier que pour tout τ et pour tout h , les matrices \mathbf{A} et \mathbf{T} sont à diagonales strictement dominantes, donc non singulières. De plus, les termes extra diagonaux sont non positifs, cela implique que les matrices sont monotones (cf Berman-Plemmons [4]).

6.4. Algorithme pour résoudre les équations de la couche limite hors-équilibre.

L'équation (6.1.3) est une équation pour la température T , et nous utilisons alors l'équation (6.1.4) pour évaluer le terme

$$(u\partial_x \bar{Y} + v\partial_y \bar{Y})\partial_{\bar{Y}} h(T, \bar{Y}),$$

ce qui conduit à l'équation:

$$\rho C_p(T, \bar{Y}) \bar{Y}^\top \nabla T - \partial_y (\lambda \partial_y T) = u \partial_x P + \mu (\partial_y u)^2 - \rho \sum_{k=1}^5 h_k(T) \Omega_k(T, P, \bar{Y}), \quad (6.4.1)$$

où $C_p(T, \bar{Y}) = \partial_T h(T, \bar{Y})$. En conservant les notations de la section précédente, nous introduisons quelques notations supplémentaires qui nous seront utiles. Pour $0 \leq n \leq N$, et pour $0 \leq j \leq m+1$, nous noterons par $U_j^n, V_j^n, T_j^n, P^n, \bar{Y}_j^n \stackrel{\text{déf}}{=} (Y_{N_j}^n, \dots, Y_{NO_j}^n)^\top$ des approximations de u, v, T, P, \bar{Y} aux points (x_n, y_j) .

Considérons maintenant les fonctions θ et $\bar{\theta}$ définies par:

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto \theta(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \\ \bar{\theta} : \mathbb{R}^5 &\rightarrow \mathbb{R}^5 \\ \bar{z} \mapsto \bar{\theta}(\bar{z}) &\text{ où } \bar{\theta}_k(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \theta(z_k); \text{ pour } 1 \leq k \leq 5. \end{aligned}$$

La fonction $\bar{\Omega}$ n'est pas Lipchitzienne par rapport à \bar{Y} , c'est pourquoi, dans ce qui suit, nous considérons la fonction $\tilde{\Omega}$ représentant le terme de production modifié qui sera une fonction Lipchitzienne par rapport à \bar{Y} . Nous définissons la fonction $\tilde{\Omega}$ par:

$$\tilde{\Omega}_k(T_j, P, \bar{Y}_j) \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega_k(T_j, P, \bar{\theta}(\bar{Y}_j)); \text{ pour } k \in \{N, O, N_2, O_2, NO\}.$$

Finalement nous désignons par:

$$\rho_j^n, C_{p_j}^n, \mu_j^n, \lambda_j^n, \tilde{\Omega}_{k_j}^n, \text{ et } h_{k_j}^n$$

les quantités suivantes:

$$\begin{aligned} \rho_j^n &\stackrel{\text{déf}}{=} \rho(P^{n+1}, T_j^n, \bar{Y}_j^n), C_{p_j}^n \stackrel{\text{déf}}{=} C_p(T_j^n, \bar{Y}_j^n), \mu_j^n \stackrel{\text{déf}}{=} \mu(P^{n+1}, T_j^n, \bar{Y}_j^n), \\ \lambda_j^n &\stackrel{\text{déf}}{=} \lambda(P^{n+1}, T_j^n, \bar{Y}_j^n), \tilde{\Omega}_{k_j}^n \stackrel{\text{déf}}{=} \tilde{\Omega}_k(T_j^n, P^{n+1}, \bar{Y}_j^n), \text{ et } h_{k_j}^n \stackrel{\text{déf}}{=} h_k(T_j^n). \end{aligned}$$

L'algorithme s'écrit:

- Soit $\{U_j^0\}_{j=0}^{m+1}$; $\{V_j^0\}_{j=0}^{m+1}$; $\{T_j^0\}_{j=0}^{m+1}$; $\{\bar{Y}_j^0\}_{j=0}^{m+1}$ donnés;

supposons connus $\{U_j^n > 0\}_{j=0}^{m+1}$; $\{V_j^n\}_{j=0}^{m+1}$; $\{T_j^n\}_{j=0}^{m+1}$; $\{\bar{Y}_j^n\}_{j=0}^{m+1}$ pour $n > 0$;

- on calcule une approximation de la vitesse tangentielle $\{U_j\}_{j=0}^{m+1}$ comme la solution de:

$$\rho_j^n \left[U_j^n \frac{U_j - U_{j-1}}{\tau} + (V_j^n)^+ \frac{U_j - U_{j-1}}{h} - (V_j^n)^- \frac{U_{j+1} - U_j}{h} \right] - \frac{1}{h} \left\{ \frac{\mu_{j+1}^n + \mu_j^n}{2} \frac{U_{j+1} - U_j}{h} - \frac{\mu_{j-1}^n + \mu_j^n}{2} \frac{U_j - U_{j-1}}{h} \right\} = - \frac{P^{n+1} - P^n}{\tau}; \text{ pour } 1 \leq j \leq m$$

$$U_0 = 0; \quad U_{m+1} = U_e(x_{n+1}). \quad (6.4.2)$$

- on calcule une approximation de la température $\{T_j\}_{j=0}^{m+1}$ comme la solution de:

$$\rho_j^n C_{p_j} \left[U_j \frac{T_j - T_j^n}{\tau} + (V_j^n)^+ \frac{T_j - T_{j-1}}{h} - (V_j^n)^- \frac{T_{j+1} - T_j}{h} \right] - \frac{1}{h} \left\{ \frac{\lambda_{j+1}^n + \lambda_j^n}{2} \frac{T_{j+1} - T_j}{h} - \frac{\lambda_{j-1}^n + \lambda_j^n}{2} \frac{T_j - T_{j-1}}{h} \right\} = U_j \frac{P^{n+1} - P^n}{\tau} - \rho_j^n \sum_{k \in Z} h_{k_j} \Omega_{k_j}^n +$$

$$\mu_j^n \left[\left(\frac{U_{j+1} - U_j}{h} \right)^2 + \left(\frac{U_j - U_{j-1}}{h} \right)^2 \right]; \text{ pour } 1 \leq j \leq m$$

$$T_0 = T_c(x_{n+1}); \quad T_{m+1} = T_e(x_{n+1}); \quad (6.4.3)$$

- on calcule une approximation des fractions massiques $\{\bar{Y}_j\}_{j=0}^{m+1} = \{Y_{N_j}, \dots, Y_{NO_j}\}_{j=0}^{m+1}$ comme les solutions de:

$$U_j \frac{\bar{Y}_j - \bar{Y}_j^n}{\tau} + (V_j^n)^+ \frac{\bar{Y}_j - \bar{Y}_{j-1}}{h} - (V_j^n)^- \frac{\bar{Y}_{j+1} - \bar{Y}_j}{h} = \bar{\Omega}(T_j, P^{n+1}, \bar{Y}_j);$$

pour $1 \leq j \leq m$; $\bar{\Omega}(T_0, P^{n+1}, \bar{Y}_0) = 0$,

et si $V_m^- > 0$ on impose $\bar{Y}_{m+1} = \bar{Y}_e(x_{n+1})$; (6.4.4)

Dans ce qui précède, $V_j^+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|V_j| + V_j}{2}$, $V_j^- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|V_j| - V_j}{2}$, c'est-à-dire la partie positive, respectivement négative de V_j .

- on calcule une approximation de la densité $\{\rho_j\}_{j=0}^{m+1}$ à l'aide de l'expression suivante:

$$\rho_j = \frac{P^{n+1}}{R_0 T_j} \left(\sum_{k \in Z} \frac{Y_{k_j}}{W_k} \right)^{-1}; 0 \leq j \leq m+1; \quad (6.4.5)$$

• finalement on calcule une approximation de la vitesse normale $\{V_j\}_{j=0}^{m+1}$ comme la solution de:

$$V_{j+1} = \frac{1}{\rho_{j+1}} \left[\rho_j V_j - \frac{h}{\tau} \left\{ \rho_j U_j - \rho_j^n U_j^n \right\} \right]; \text{ pour } 1 \leq j \leq m$$

$$V_0 = 0. \quad (6.4.6)$$

• On pose alors

$$\begin{aligned} \{U_j^{n+1}\}_{j=0}^{m+1} &\stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{U_j\}_{j=0}^{m+1}; \quad \{V_j^{n+1}\}_{j=0}^{m+1} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{V_j\}_{j=0}^{m+1}; \quad \{T_j^{n+1}\}_{j=0}^{m+1} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{T_j\}_{j=0}^{m+1}; \\ \{\bar{Y}_j^{n+1}\}_{j=0}^{m+1} &\stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{\bar{Y}_j\}_{j=0}^{m+1}; \quad \{\rho_j^{n+1}\}_{j=0}^{m+1} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{\rho_j\}_{j=0}^{m+1}. \end{aligned}$$

Si $x_{n+1} \leq X$, on pose $n = n + 1$ et on recommence le cycle (6.4.2),..., (6.4.6).

Remarques.

Si les concentrations \bar{Y}_j restent dans $[0, 1]^5$ pour $0 \leq j \leq m + 1$ alors $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}$ et résoudre l'équation (6.4.4) est équivalent à résoudre une approximation de l'équation (6.1.4).

En raisonnant comme nous l'avons fait à la section précédente, tant que $\{U_j^n\}_{j=0}^{m+1}$ est une famille de nombres positifs, il est standard de vérifier que les schémas (6.4.2) et (6.4.3) conduisent à des problèmes matriciels bien posés et que ce sont des schémas monotones.

Maintenant, montrons que sous certaines hypothèses le schéma (6.4.4) conduit à un problème bien posé et que les vecteurs concentrations \bar{Y} restent dans $(0, 1)^5$.

Le problème (6.4.4) est non linéaire, il est donc nécessaire de proposer un algorithme convergent pour le résoudre. Dans ce qui suit, nous noterons V_j pour V_j^n et nous supposons que:

HP5 $\{V_j\}_{j=0}^{m+1}$ est une famille de nombres négatifs avec $V_0 = 0$ et que $\{U_j\}_{j=1}^{m+1}$ est une famille de nombres positifs avec $U_0 = 0$.

Pour h et τ fixés, et pour $\{T_j > 0\}_{j=0}^{m+1}$, $P^{n+1} > 0$ donnés, récrivons le schéma (6.4.4) sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} (U_j + \frac{\tau}{h} V_j^-) \bar{Y}_j &= \tau \bar{\Omega}(T_j, P^{n+1}, \bar{Y}_j) + \frac{\tau}{h} V_j^- \bar{Y}_{j+1} + U_j \bar{Y}_j^n \text{ pour } 1 \leq j \leq m; \\ \bar{Y}_{m+1} &= \bar{Y}_e(x_{n+1}); \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

Avant de donner un résultat d'existence pour le problème (6.4.7), introduisons les sous-ensembles de \mathbb{R}^5 D , et E_c dont nous aurons besoin. On définit D et E_c par:

$$\begin{aligned} D &\stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{ \bar{W} \in \mathbb{R}^5 \text{ tels que } A^* \bar{W} = \bar{c} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} (c_1, c_2)^T, c_1 > 0, c_2 > 0, c_1 + c_2 = 1 \}; \\ E_c &\stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{ \bar{W} \in D \text{ tels que } W_k > 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq 5 \}. \end{aligned}$$

Les relations (6.1.19), (6.1.20) montrent que le vecteur des fractions massiques des espèces à l'extérieur de la couche limite \bar{Y}_e vérifie $A^* \bar{Y}_e = \bar{c} = (.769, .231)^T$.

Théorème 6.4.1. Supposons que les hypothèses HP1 à HP5 sont satisfaites. Soit $\{\vec{Y}_j^n\}_{j=1}^m$ une collection de vecteurs tels que $\vec{Y}_j^n \in D$ pour $j \in \{1, \dots, m\}$ et soit $\vec{Y}_e \in D$ donnés. Il existe un $\tau_0 > 0$ tel que $\forall \tau \in (0, \tau_0)$ le problème non linéaire (6.4.7) admet une unique solution $\{\vec{Y}_j\}_{j=1}^m$ telle que $\vec{Y}_j \in D$ pour $j \in \{1, \dots, m\}$. De plus les vecteurs \vec{Y}_j peuvent être calculés par le procédé itératif de Picard. En outre, si $\vec{Y}_j^n \in E_c$ et si $\vec{Y}_e \in E_c$, alors $\vec{Y}_j \in E_c$, pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$.

Démonstration. On raisonne par récurrence. On a:

$$\vec{Y}_{m+1} = \vec{Y}_e \in D.$$

Montrons maintenant que l'hypothèse de récurrence suivante est satisfaite:

$\exists \tau_0$ tel que $\forall \tau \in (0, \tau_0)$, si $\vec{Y}_{j+1} \in D$ est solution de (6.4.7)
alors il existe un unique vecteur $\vec{Y}_j \in D$ solution de (6.4.7) pour
 $1 \leq j < m+1$.

Soit j fixé, et soit $\vec{Y}_{j+1} \in D$ solution de (6.4.7). Montrons qu'il existe τ_0 qui ne dépend pas de j et qu'il existe un unique $\vec{Y}_j \in D$ solution de (6.4.7) $\forall \tau \in (0, \tau_0)$.
Nous définissons l'opérateur Λ par:

$$\begin{aligned} \Lambda : \text{Dom}(\Lambda) &\rightarrow \mathbb{R}^5; \\ \vec{W} &\mapsto \Lambda \vec{W} \text{ satisfaisant} \\ \Lambda \vec{W} &= \frac{\tau \tilde{\Omega}(T_j, P^{n+1}, \vec{W})}{(U_j + \frac{\tau}{h} V_j^-)} + \frac{\frac{\tau}{h} V_j^- \vec{Y}_{j+1} + U_j \vec{Y}_j^n}{(U_j + \frac{\tau}{h} V_j^-)}. \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

D'après le lemme 2.3.3 et la définition de $\tilde{\theta}$ on a que le domaine de définition de Λ , $\text{Dom}(\Lambda)$ est donné par:

$$\text{Dom}(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \vec{W} \in \mathbb{R}^5 \text{ tels que } \exists l \in \{1, \dots, 5\}, W_l > 0 \}.$$

Vérifions tout d'abord que $D \subset \text{Dom}(\Lambda)$, et que Λ laisse invariant le sous-espace affine D .
Montrons que:

$$\forall \vec{W} \in D \text{ il existe } l \in \{1, \dots, 5\} \text{ tel que } W_l \geq \frac{1}{5}.$$

Raisonnons ab absurdo et supposons que $W_k < \frac{1}{5}$ pour tout $k \in \{1, \dots, 5\}$, on en déduit que $\sum_{k=1}^5 W_k < 1$.

Par ailleurs, d'après la propriété (2.1.2) que vérifie la matrice A^z , $\sum_{i=1}^2 A_{ik}^z = 1$ pour $1 \leq k \leq 5$, on a:

$$1 = c_1 + c_2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^5 A_{ik}^z W_k = \sum_{k=1}^5 W_k,$$

ce qui contredit l'inégalité: $\sum_{k=1}^5 W_k < 1$. On en déduit que $\bar{\theta}(D)$, l'image de D par l'application $\bar{\theta}$, reste à une distance positive de l'origine. Lorsque \mathbb{R}^5 est muni de la norme $\|\cdot\|_2$ on a:

$$\text{dist}(\bar{\theta}(D), \bar{0}) \geq \frac{1}{5}.$$

On a montré que $D \subset \text{Dom}(\Lambda)$.

Assurons nous maintenant que Λ laisse invariant le sous-espace affine D . Pour $\bar{W} \in D$ calculons $A^* \bar{W}$.

Le lemme 2.3.3 implique que $\tilde{\Omega}(T, P, \bar{M}) \in \text{Ker} A^* \forall \bar{M} \in [\mathbb{R}_+^5 \setminus \bar{0}]$, donc en utilisant les propriétés $\bar{Y}_j^n \in D$ et $\bar{Y}_{j+1} \in D$, on déduit que le produit du second membre de l'égalité (6.4.8) par A^* est égal à:

$$\frac{\frac{\tau}{h} V_j^- A^* \bar{Y}_{j+1} + U_j A^* \bar{Y}_j^n}{(U_j + \frac{\tau}{h} V_j^-)} = \frac{(U_j + \frac{\tau}{h} V_j^-)}{(U_j + \frac{\tau}{h} V_j^-)} \bar{c}.$$

L'image de D par Λ reste dans D .

Montrons maintenant que Λ est un opérateur Lipchitzien. Calculons

$$\|\Lambda(\bar{W}^1) - \Lambda(\bar{W}^2)\|_2 = \frac{\tau}{(U_j + \frac{\tau}{h} V_j^-)} \sqrt{\sum_{k=1}^5 [\tilde{\Omega}_k(T_j, P^{n+1}, \bar{W}^1) - \tilde{\Omega}_k(T_j, P^{n+1}, \bar{W}^2)]^2}.$$

D'une part le lemme 2.3.3 implique que $\tilde{\Omega}(T, P, \bar{M}) \in C^1(\mathbb{R}_+^2 \times [\mathbb{R}_+^5 \setminus \bar{0}]; \mathbb{R}^5)$. D'autre part, $\bar{\theta}(D)$ reste à une distance positive de l'origine, et $\bar{\theta}$ est une fonction Lipchitzienne bornée. On en déduit que $\tilde{\Omega}(T_j, P^{n+1}, \bar{W})$ est une fonction Lipchitzienne pour tout j tel que $1 \leq j \leq m$ puisque c'est la composée d'une fonction Lipchitzienne et bornée avec une fonction C^1 .

On pose $\delta_1 = \frac{1}{5}$ et on définit $L_{\tilde{\Omega}}$ par:

$$L_{\tilde{\Omega}} = \max_{1 \leq j \leq m} \sup_{\bar{Z} \in [\delta_1, 1]^5} \|\partial_{\bar{Z}} \tilde{\Omega}(T_j, P^{n+1}, \bar{Z})\|_2.$$

On alors a l'inégalité suivante:

$$\|\Lambda(\bar{W}^1) - \Lambda(\bar{W}^2)\|_2 \leq \tau \frac{1}{(U_j + \frac{\tau}{h} V_j^-)} L_{\tilde{\Omega}} \|\bar{W}^1 - \bar{W}^2\|_2. \quad (6.4.9)$$

Nous définissons alors τ_0 tel que:

$$\tau_0 L_{\tilde{\Omega}} \frac{1}{\min_{1 \leq j \leq m} U_j} < 1. \quad (6.4.10)$$

Ainsi l'application Λ est strictement contractante et admet donc un unique point fixe $\bar{Y}_j \in D$ qui sera solution du problème (6.4.7) et qui peut être calculée par le procédé itératif de Picard. L'hypothèse de récurrence est vérifiée.

Montrons maintenant que \bar{Y}_j vérifiant $\bar{Y}_j = \Lambda \bar{Y}_j$ appartient à E_c si $\bar{Y}_j^n \in E_c$ et si $\bar{Y}_e \in E_c$, pour $1 \leq j \leq m$. Pour cela il suffit de montrer que $\bar{Y}_j > 0$ pour $1 \leq j \leq m$. Supposons que $\{\bar{Y}_j\}_{j=1}^m$ solution de (6.4.7) soit telle que:

$$\min_{\substack{1 \leq k \leq 5 \\ 1 \leq j \leq m}} Y_{kj} \leq 0; \text{ et notons } Y_{li} = \min_{\substack{1 \leq k \leq 5 \\ 1 \leq j \leq m}} Y_{kj}. \quad (6.4.11)$$

Du lemme 2.3.4 nous déduisons que: $\tilde{\Omega}_l(T_i, P^{n+1}, \bar{Y}_i) > 0$.

Ecrivons le schéma (6.4.7) pour $j = i$ et pour la composante l . Il vient:

$$U_i Y_{li} + \frac{\tau}{h} V_i^- (Y_{li} - Y_{li+1}) = \tau \tilde{\Omega}_l(T_i, P^{n+1}, \bar{Y}_i) + U_i Y_{li}^n. \quad (6.4.12)$$

On obtient alors une contradiction puisque $\tau \tilde{\Omega}_l + U_i Y_{li}^n > 0 \forall \tau > 0$, tandis que le membre de gauche de (6.4.12) est non positif d'après l'hypothèse HP5 et la propriété (6.4.11). Le théorème 6.4.1 est démontré.

□

Nous terminons cette section par quelques remarques.

Remarques 6.4.1

- i) Dans HP5 si nous remplaçons l'hypothèse $\{V_j\}_{j=0}^{m+1}$ est une famille de nombres négatifs par $\{V_j\}_{j=0}^{m+1}$ est une famille de nombres positifs, alors en utilisant le comportement asymptotique des fractions massiques étudié au chapitre 5: les fractions massiques sont égales à leurs valeurs à l'équilibre chimique sur le corps, on définit \bar{Y}_0 comme étant égal aux valeurs de l'équilibre chimique. Dans ce cas, le théorème 6.4.1 rest vrai.
- ii) la couche limite existe pour autant que $u(x, y) > 0 \forall y > 0$, ce que l'on exprime aussi par $\partial_y u(x, y) > 0$. Dans ce contexte, si on suppose que $U_1 \geq \alpha h$ avec $\alpha > 0$ et que les $\{U_j\}_{j=1}^{m+1}$ forment une famille croissante de nombres positifs (ce qui est réalisé dans certains cas), la condition (6.4.10) se transforme en: $\tau_0 L_{\tilde{\Omega}} \frac{1}{\alpha h} < 1$. Cette condition s'apparente aux conditions de stabilité classiques des méthodes explicites.
- iii) dans la pratique, pour calculer \bar{Y}_j solution du problème (6.4.7) nous utilisons une méthode de Newton initialisée avec la valeur de \bar{Y}_{j+1} . En effet la condition (6.4.10) n'est pas nécessaire pour démontrer l'existence d'un point fixe.
- iiii) dans le cas de la plaque plane, on vérifie a posteriori que les composantes de la vitesse ont un signe constant.
- vi) on peut simplifier la cinétique chimique en ne considérant que dix-sept réactions chimiques, c'est-à-dire, les réactions (2.3.10) à (2.3.26). Pour cette situation, le

théorème 2.3.4 ne peut plus être utilisée, puisque l'hypothèse HP3 du chapitre 2 n'est plus vérifiée (cf remarque 2.3.2). Néanmoins, cela ne modifie pas le lemme 6.4.1, il faut simplement, dans la démonstration de celui-ci utiliser la remarque 2.3.2 (qui implique que $\tilde{\Omega}_i \geq 0$) au lieu du lemme 2.3.4.

6.5. Quelques résultats numériques.

Les résultats numériques que nous présentons ont été obtenus avec deux cas-test: la plaque plane sans incidence et l'ellipse 2D sous trente degrés d'incidence.

1. Plaque plane sans incidence.

Nous considérons tout d'abord quelques résultats numériques mettant en évidence les effets de la réactivité chimique de l'air lorsque l'on calcule la température et la vitesse.

Les résultats numériques que nous présentons avec les figures 2 et 3 ont été obtenus avec les valeurs suivantes pour les paramètres physiques et les paramètres de discrétisation:

$$\begin{array}{lll} P = 12027 \text{ pa}; & \mu = 5.10^{-3} \text{ Kg/m/s}; & c_1 = .769 \\ Prandtl = 1.1; & C_p = 1005 \text{ s/Kg/K}; & c_2 = .231 \\ m = 100; & N = 200; & \tau = .001 \end{array}$$

Pour ces figures, les symboles blancs représentent les quantités calculées lorsque la réactivité chimique de l'air est prise en compte et lorsque l'hypothèse de la chimie à l'équilibre est satisfaite, alors que les symboles noirs représentent les mêmes quantités lorsqu'elle est négligée, c'est-à-dire lorsque le terme $\partial_T H(T, P)$ est constant (ce qui revient à considérer $C_p^n = C^{st}$ et $\partial_P \bar{Y} = 0$ dans l'algorithme de la section 3 et à ne pas calculer les fractions massiques).

Dans le cas où $u_e \stackrel{\text{déf}}{=} 3000 \text{ m/s}$, $T_e = 2000 \text{ K}$, $T_c = 2500 \text{ K}$, et $\delta = .06$, la figure 2 représente respectivement la température et la vitesse tangentielle comme des fonctions de l'altitude au point $x = .2m$.

La figure 3 représente les mêmes quantités comme des fonctions de l'altitude au point $x = .2m$ lorsque $u_e \stackrel{\text{déf}}{=} 5000 \text{ m/s}$, $T_e = 4063 \text{ K}$, $T_c = 2500 \text{ K}$, et $\delta = .085$.

Remarque 6.5.1.

Les figures 2 et 3 montrent que le maximum de la température décroît dans la couche limite lorsque la réactivité chimique du fluide est considérée, cela en accord avec la physique des réactions chimiques qui sont endothermiques.

Nous considérons maintenant une plaque plane plongée dans un écoulement d'air chimiquement réactif, et nous présentons les résultats que nous avons obtenus lorsque les réactions chimiques sont à l'équilibre et lorsqu'elles n'y sont pas. Nous désignons ces situations par l'équilibre chimique, respectivement le non-équilibre chimique. Les paramètres physiques que nous avons utilisés sont les suivants:

- la viscosité est constante, $\mu = 0.005$;
- la diffusion thermique est constante, $\lambda = 4.568$;
- la température sur la plaque vaut 1500° K .

Les figures 4 et 5 représentent les profils de la température et de la vitesse tangentielle à l'abscisse $x = 1.2m$ comme des fonctions de l'altitude.

Les figures 6 et 7 représentent les fractions massiques des espèces O_2 et N_2 à la même abscisse comme des fonctions de l'altitude dans le cas de l'équilibre chimique et du non-équilibre chimique dans la couche limite, lorsque l'écoulement externe est à l'équilibre chimique.

Remarque 6.5.2.

-Les figures 6 et 7 mettent en évidence la possibilité de considérer l'équilibre chimique dans la couche limite lorsque l'écoulement extérieur est lui même à l'équilibre chimique.

Remarque 6.5.3.

La propriété (P_r) montre que l'hypothèse HP1 faite au chapitre 4 est réaliste dans la pratique. Le schéma numérique que nous utilisons pour l'équation (6.3.4) est celui que nous avons étudié au chapitre 4.

2. Ellipse 2D sous 30° d'incidence.

Nous considérons un corps de forme elliptique (considéré comme infini dans la direction transverse à l'écoulement d'air, voir figure 1), plongé dans un écoulement d'air. Nous supposons que les réactions chimiques sont à l'équilibre. Le nombre de Mach de l'écoulement est 25, la viscosité et la conductivité thermique dépendent de la température. Dans le cadre du projet Européen Hermès d'étude d'une navette spatiale, cette configuration a été proposée pour représenter la navette spatiale lors de sa rentrée dans l'atmosphère. Un workshop intitulé "on hypersonic flows for reentry problems" a été organisé par l'INRIA (cf [6]) afin de comparer les résultats que l'on peut obtenir par différentes approches (modèle visqueux, non visqueux,...) pour le problème de la rentrée dans l'atmosphère de la navette. Les résultats que nous allons discuter ont été présentés à ce workshop. Pour une description détaillée des paramètres physiques, nous renvoyons à [6] cas-test 6.3.2.

La température est imposée sur le corps et vaut $1500^0 K$, la température à l'infini vaut $56^0 K$, la pression $P_\infty = 2.5P_a$ et évidemment la vitesse est nulle sur le corps.

Les figures 8 à 10 représentent les profils de la vitesse tangentielle, de la température, et de la vitesse normale en fonction de l'altitude qui ont été utilisés comme conditions "initiales" pour l'algorithme (6.3.3)-(6.3.8). Ces champs ont été calculés avec la méthode exposée à la section 2.

Les figures 11 à 13 représentent la température, la vitesse tangentielle divisée par la vitesse du son à l'infini et le coefficient de pression $C_{ext} = \frac{2(P-P_\infty)}{\rho_\infty |\vec{V}_\infty|^2}$ sur le bord extérieur de la couche limite comme fonction de l'abscisse curviligne.

Les figures 14 à 16 représentent les isothermes, les iso-Mach et les lignes de courant dans la couche limite.

Maintenant intéressons nous à l'ordre de convergence de la méthode par rapport au paramètre h de la discrétisation dans la direction normale au corps. On choisit une abscisse curviligne \bar{x} . Soit h_0 le plus petit paramètre pour lequel nous pouvons effectuer les calculs sur l'ordinateur dont nous disposons sans dépasser sa capacité mémoire, et soit le paramètre τ_0 de la discrétisation dans la direction de l'abscisse curviligne tel que les valeurs calculées à l'abscisse \bar{x} pour les paramètres $\frac{\tau_0}{2}, h_0$ soient identiques à celles calculées à l'abscisse \bar{x} pour τ_0, h_0 à la précision machine près. On considère que les valeurs obtenues à l'abscisse \bar{x} pour la température T et pour la vitesse tangentielle U avec les paramètres τ_0, h_0 sont les valeurs des solutions exactes à l'abscisse \bar{x} .

La figure 17 représente la variation en norme L^∞ de l'erreur entre la solution exacte à l'abscisse \bar{x} et la solution calculée avec les paramètres τ_0, h lorsque h varie.

Pour conclure ce chapitre, nous donnons quelques remarques concernant la méthode numérique que nous venons de présenter.

Conclusion.

-L'ordre de la méthode est proche de 1 comme l'indique la figure 17, ce qui est cohérent avec la discrétisation et la "linéarisation" que nous avons utilisées.

-La méthode numérique que nous avons présentée n'utilise par de transformation de coordonnées ce qui augmente sa simplicité et a comme conséquence une mise en oeuvre facile.

-Les résultats que nous avons obtenus sont aussi précis que ceux obtenus avec d'autres codes numériques, voir Sawley et al [8] par exemples.

-La méthode présentée se généralise facilement au cas où les vitesses de diffusion des espèces ne sont plus négligées, et les résultats du théorème 6.4.1 subsistent si on suppose en plus de l'hypothèse HP5 que $\{V_j\}_{j=0}^{m+1}$ est une suite décroissante (i.e $V_j \leq V_{j-1}$). Néanmoins, on ne peut plus découpler les inconnues sur une ligne verticale. On remarquera que le problème remplaçant l'équation (6.4.4) peut s'écrire schématiquement:

$$(UId + A)\vec{Y} = \tau\vec{B}(\vec{Y}) + \vec{F} + UId\vec{Y}^n,$$

où $\vec{B}(\vec{Y})$ représente le taux de production, \vec{F} représente les termes de bord, UId représente la matrice diagonale construite avec les U_j , et $\vec{Y} \in \mathbf{R}^{m5}$ représente les cinq composantes des fractions massiques aux points jh .

La matrice A est une discrétisation de l'opérateur de diffusion convection. La matrice A est une matrice régulière et définie positive (grâce à l'hypothèse HP5 et à la propriété $V_j \leq V_{j-1}$).

-La convergence de la méthode est un problème ouvert. A notre connaissance il n'existe pas de résultat de convergence pour le problème de la couche limite incompressible lorsque celui-ci est formulé avec les inconnues physiques (dans les travaux d'Oleinik [7] il y a des

résultats de convergence lorsque le problème est transformé au moyen d'un changement d'inconnues qui utilise la fonction de courant).

La convergence de la méthode utilisée pour les équations de la vitesse (6.1.1) et (6.1.2) est un problème ouvert du fait du manque d'estimation a priori sur la fonction v (nous disposons seulement d'estimations pour $\|\partial_x u^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(Q)}$).

-Pour la convergence des problèmes partiels, voir les chapitres 3 et 4.

REFERENCES

1. Anderson, J.D., *Hypersonic and high temperature gas dynamics, series in aeronautical and aerospace engineering*, Mc Graw-Hill, 1989.
2. Boillat E., Pousin J., *A numerical investigation of two-dimensional reactive boundary layer equations*, Proc. 5th Intern. Symp. on Numerical Methods in Engineering Eds R. Gruber, J. Périaux, R.P. Shaw (1989), Comp. Mechanics Pub. Springer-Verlag.
3. E. Boillat, *Modélisation et analyse numérique de couches limites réactives*, Thèse de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. A paraître.
4. Berman A., Plemmons R.J., *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Academic Press, New-York, 1979.
5. Edelm C., *Couches limites hypersoniques avec effet de dissociation*, Thèse de l'école nationale sup. de l'aéronautique et de l'espace, Toulouse, 1987.
6. INRIA GAMNI-SMAI, *Workshop on hypersonic flow for reentry problems*, INRIA 22-25 january, ANTIBES (France), 1990.
7. Oleinik O.A., *Mathematical problems of boundary layer theory*, Lecture Notes of university of Minnesota University of Minnesota Minneapolis.
8. Sawley M. L., Vos J. B., Wüthrich S., *Modelization and calculation of laminar hypersonic boundary layer flows*, Inter. Conf. on Hypersonic Aerodynamics (1989), Manchester.

FIGURE 2

PROFILS DE LA TEMPERATURE ET DE LA VITESSE TANGENTIELLE

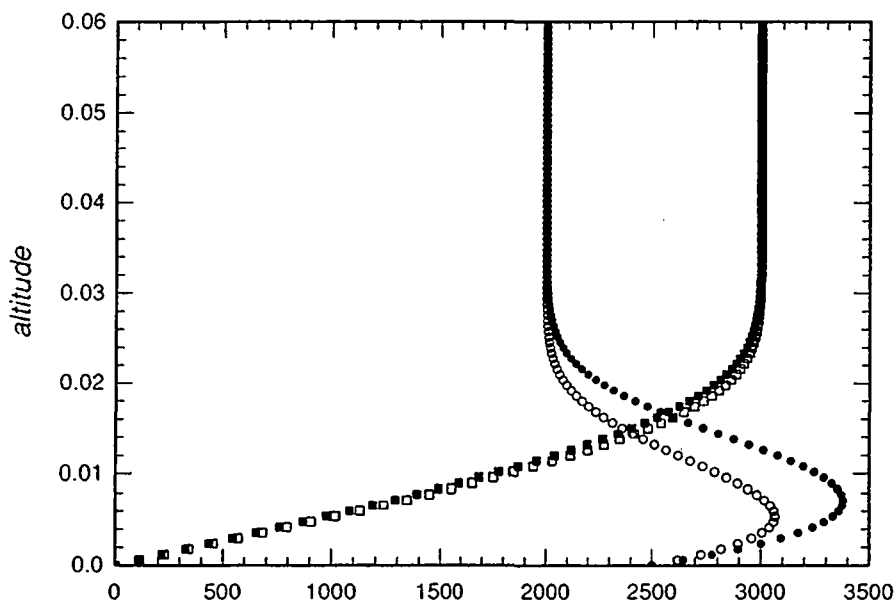
Temperature $T_{\bullet\circ}$ and velocity $u_{\blacksquare\circ}$ 

FIGURE 3

PROFILS DE LA TEMPERATURE ET DE LA VITESSE TANGENTIELLE

Temperature T ●○ and velocity u ■□

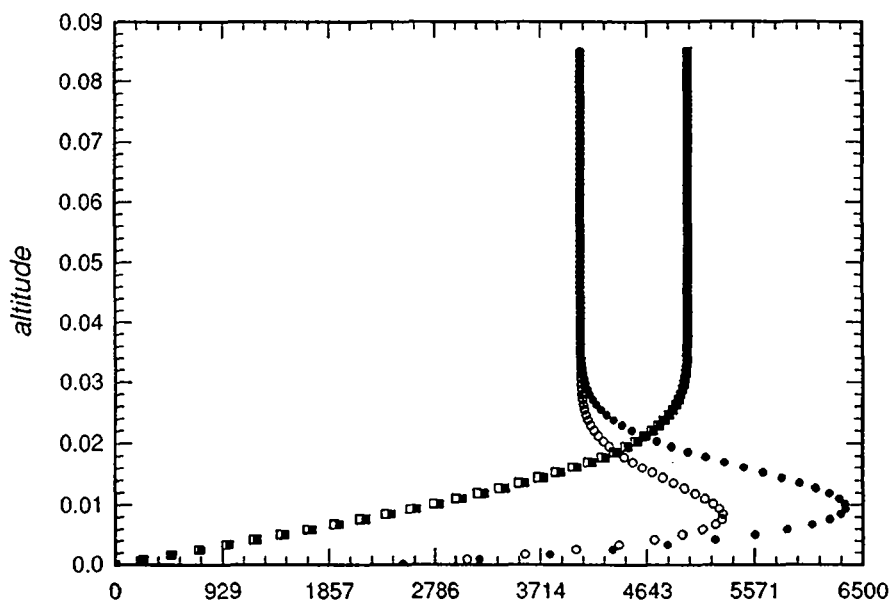


FIGURE 4

PROFILS DE LA TEMPERATURE

◇ hors-équilibre chimique.

× équilibre chimique.

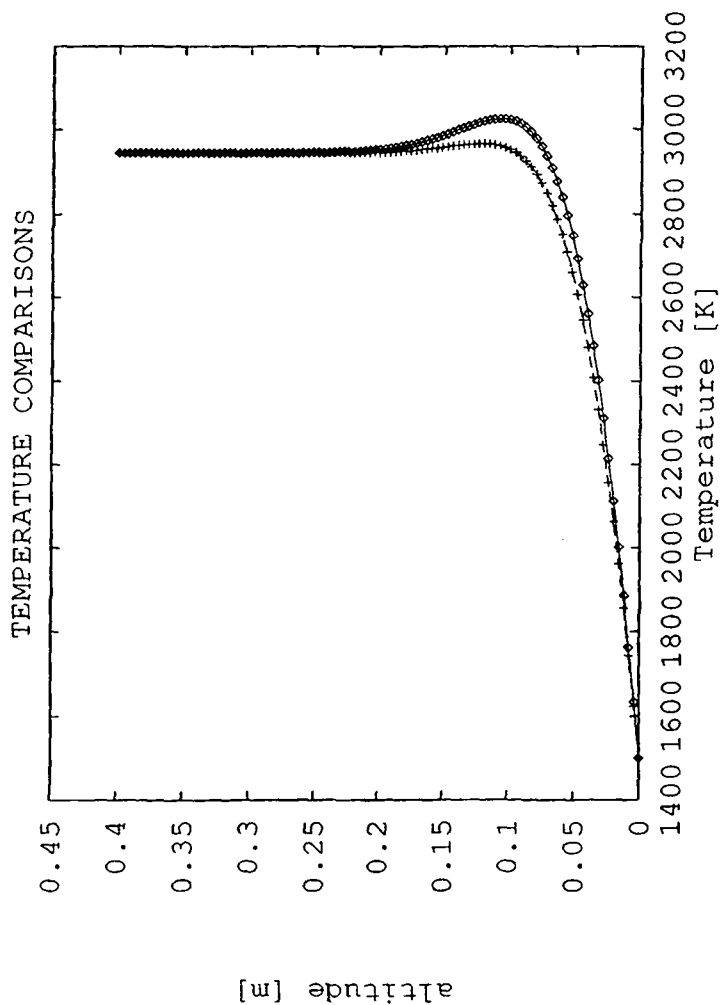


FIGURE 5

PROFILS DE LA VITESSE TANGENTIELLE

◇ hors-équilibre chimique.

× équilibre chimique.

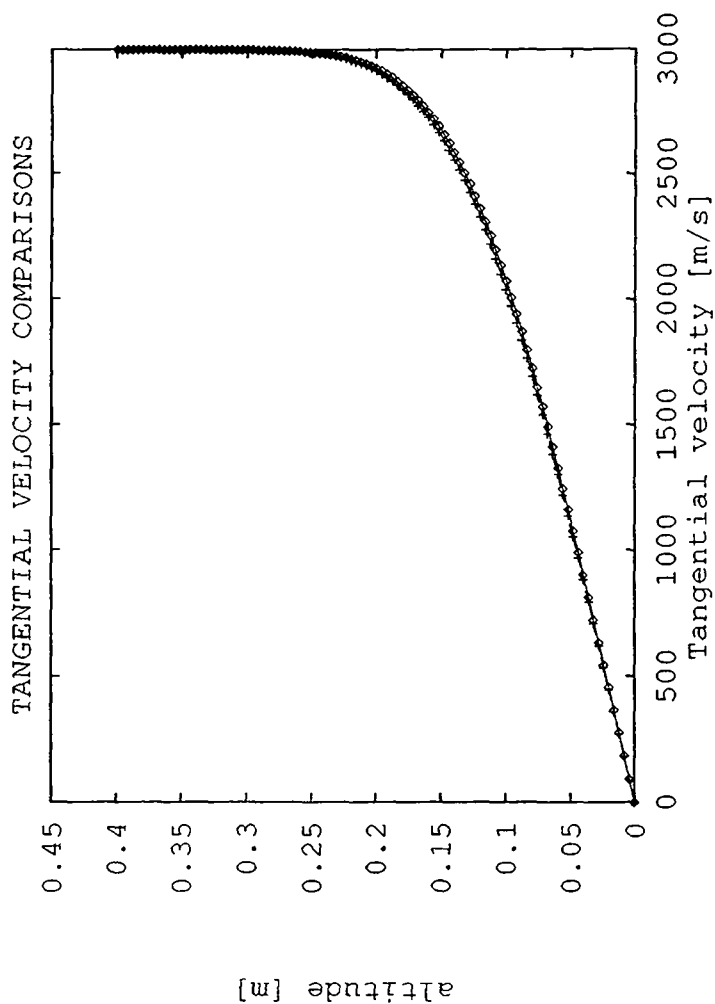


FIGURE 6

COMPARAISON DES FRACTIONS MASSIQUES DE O_2 A L'EQUILIBRE
ET HORS-EQUILIBRE

◇ hors-équilibre chimique.

× équilibre chimique.

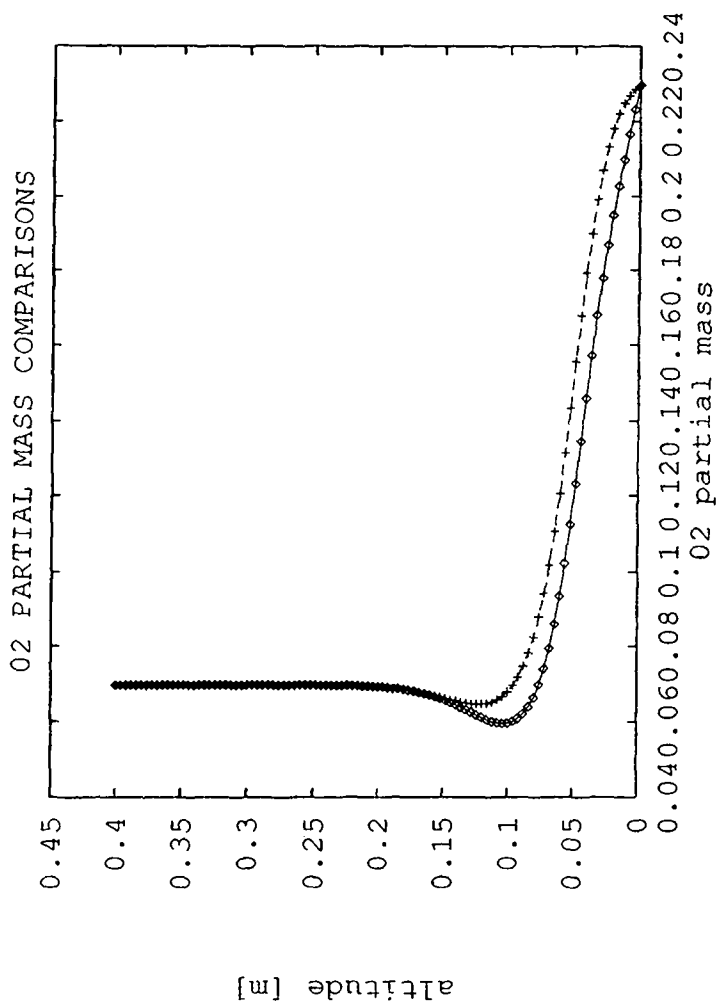


FIGURE 7

COMPARAISON DES FRACTIONS MASSIQUES DE N_2 A L'EQUILIBRE
ET HORS-EQUILIBRE

◇ hors-équilibre chimique.

× équilibre chimique.

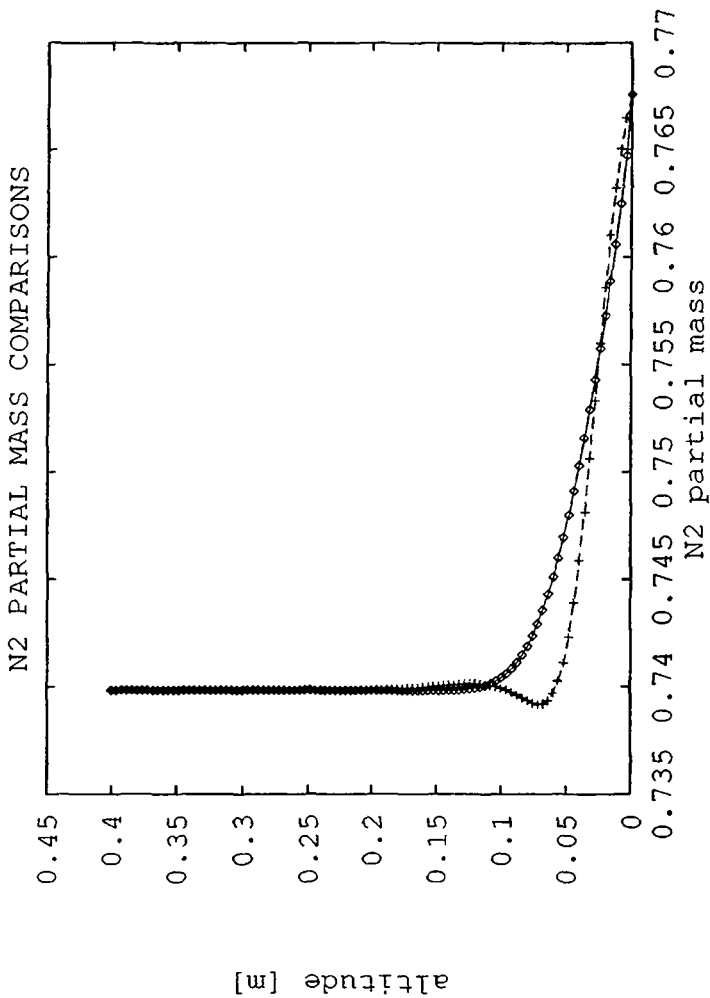


FIGURE 8

VITESSE TANGENTIELLE "INITIALE" AU VOISINAGE DE LA LIGNE DE STAGNATION

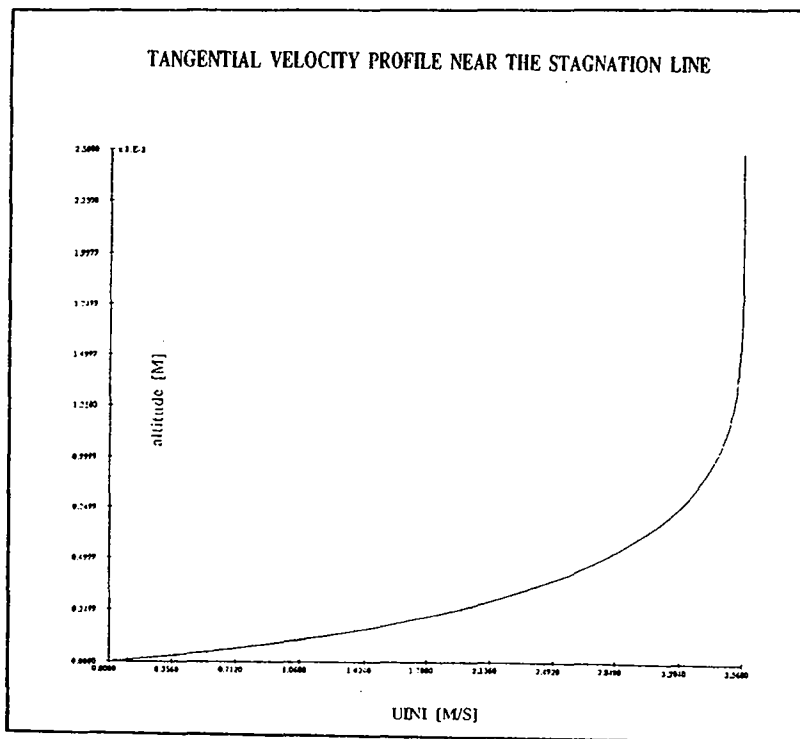


FIGURE 9

TEMPERATURE "INITIALE" AU VOISINAGE DE LA LIGNE DE STAGNATION

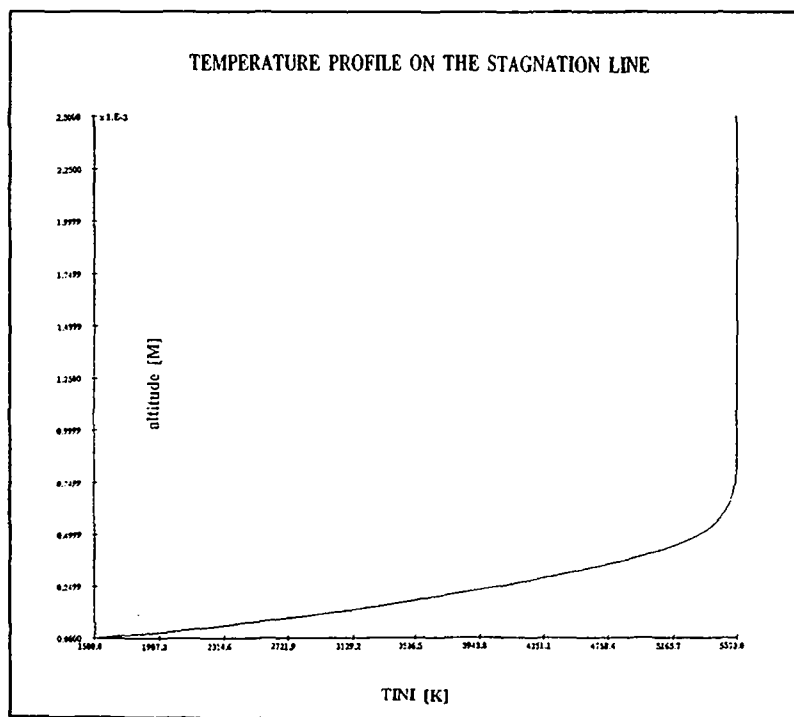


FIGURE 10

VITESSE NORMALE "INITIALE" AU VOISINAGE DE LA LIGNE DE STAGNATION

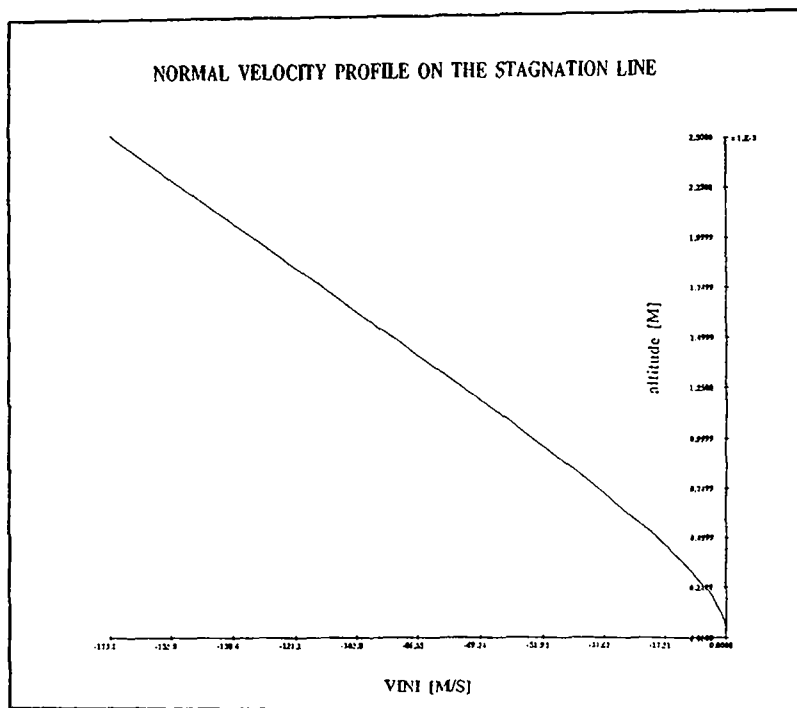


FIGURE 11

TEMPERATURE SUR LE BORD EXTERNE DE LA COUCHE LIMITE

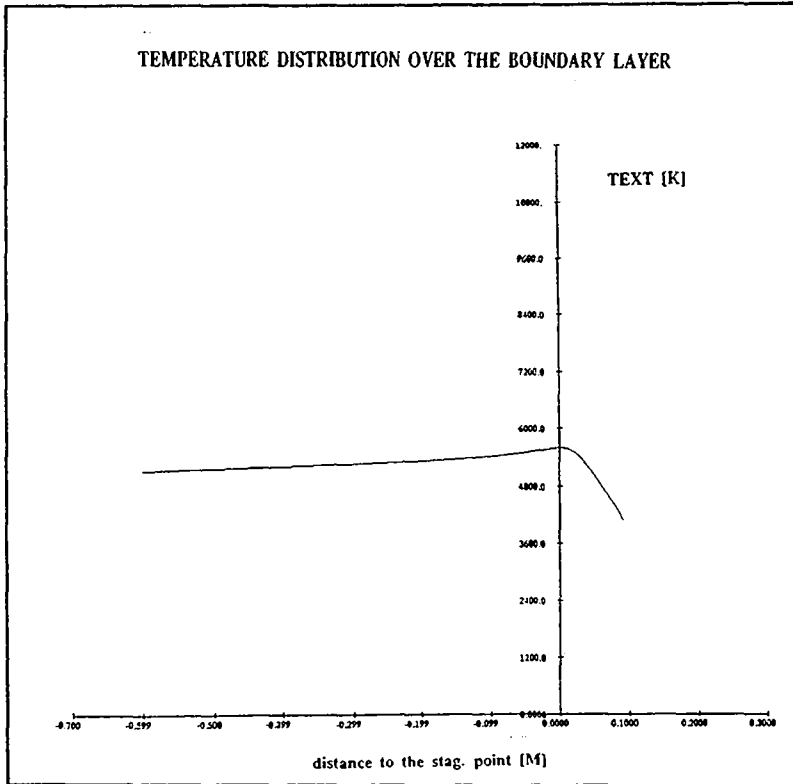


FIGURE 12

NOMBRE DE MACH SUR LE BORD EXTERNE DE LA COUCHE LIMITE

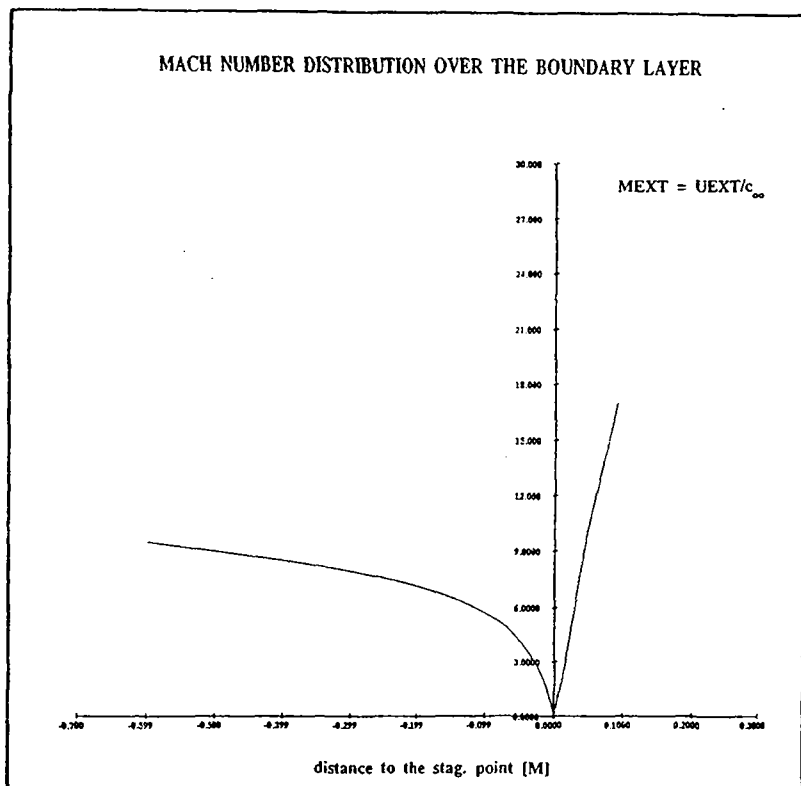


FIGURE 13

COEFFICIENT DE PRESSION SUR LE BORD EXTERNE DE LA COUCHE LIMITE

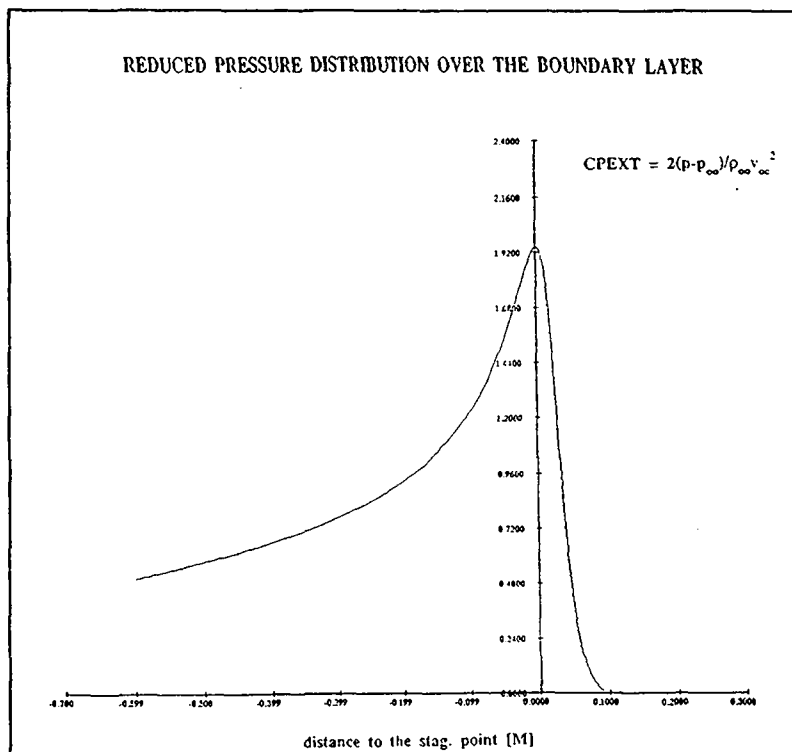


FIGURE 14

ISOTHERMES DANS LA COUCHE LIMITE

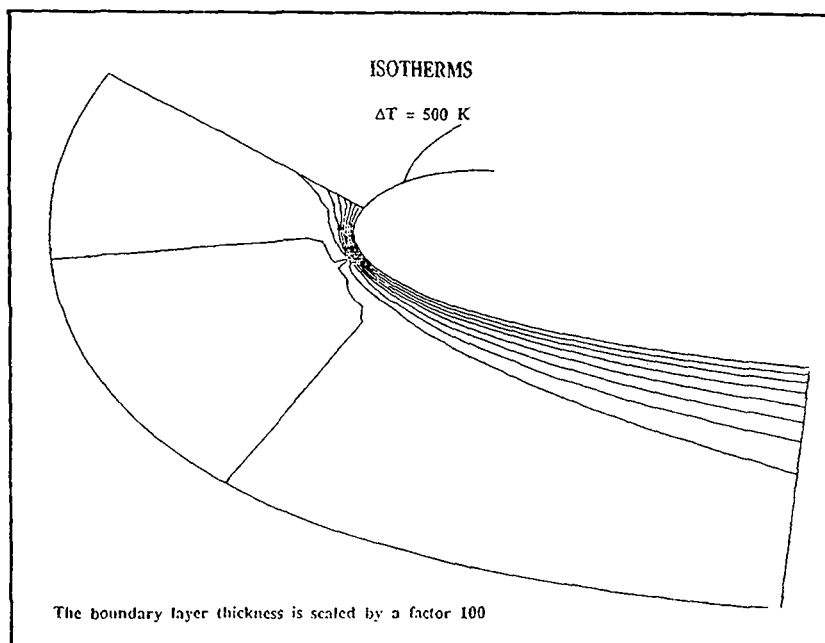


FIGURE 15

ISO-VALEURS DU NOMBRE DE MACH DANS LA COUCHE LIMITE

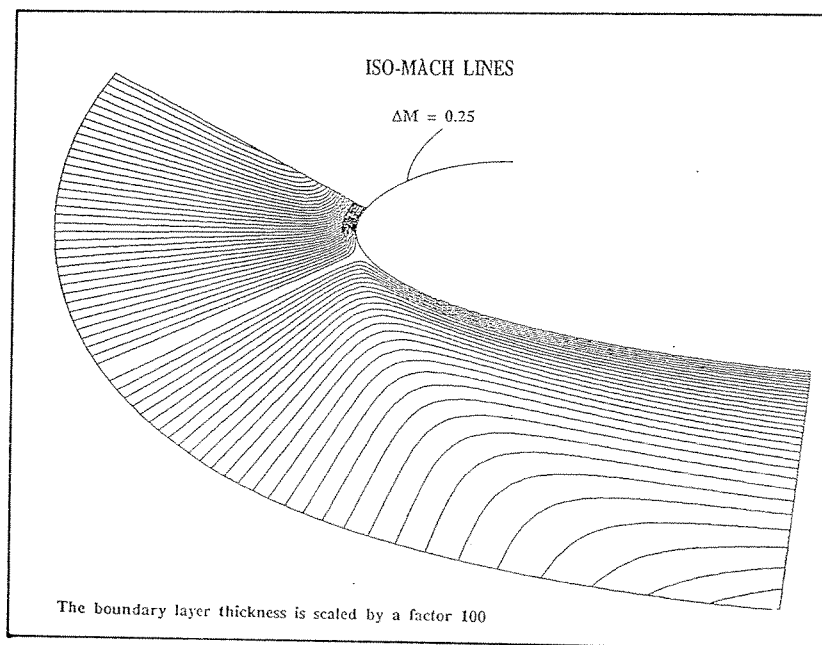


FIGURE 16

LIGNES DE COURANT DANS LA COUCHE LIMITE

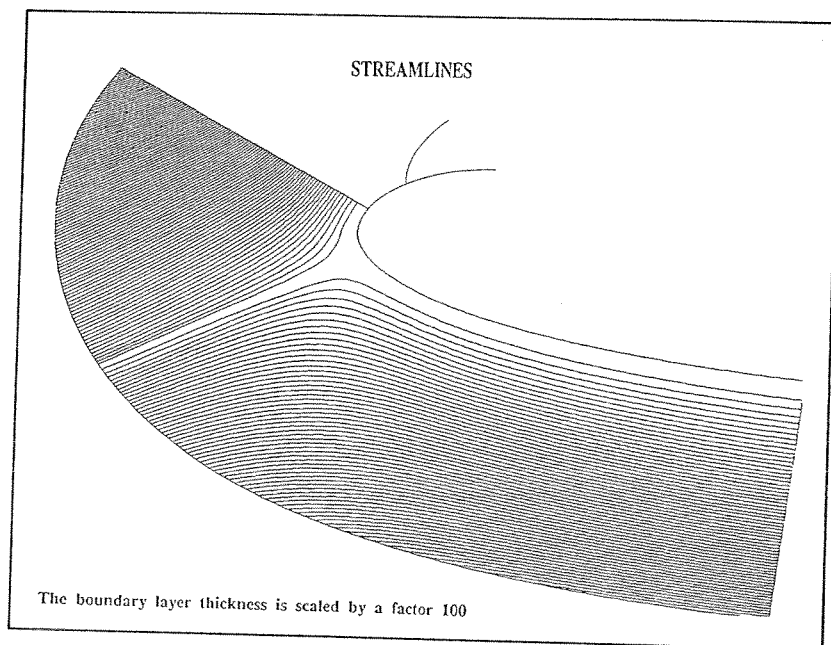
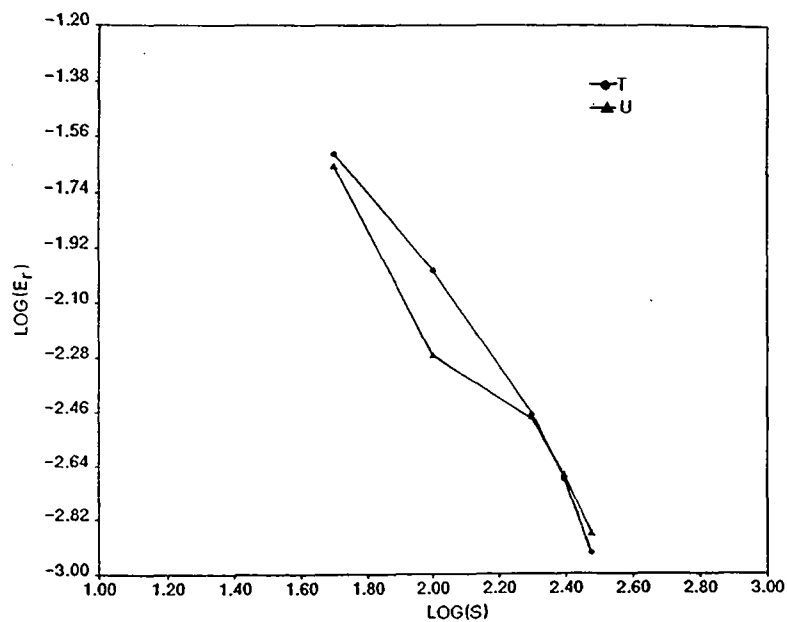


FIGURE 17

COURBE DE CONVERGENCE

Température —●—

Vitesse tangentielle —▲—



CURRICULUM VITAE

Originaire de France, je suis né à Paris le 13 octobre 1957. Après avoir obtenu un Baccalauréat scientifique de type C à Paris en juin 1975, j'ai poursuivi des études de mathématiques à l'université Paris 7 où j'ai obtenu en juin 1979 une maîtrise de mathématiques.

En 1981 j'ai obtenu un D.E.A d'analyse numérique à l'université Pierre et Marie Curie Paris 6. En 1983 j'ai obtenu un doctorat de troisième cycle de mathématiques mention analyse numérique à l'université Pierre et Marie Curie Paris 6.

Durant les années 1984-1987 j'ai occupé un poste de jeune chercheur au laboratoire d'Hydrodynamique Navale de l'Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées de Paris (ENSTA). Depuis octobre 1987 je suis collaborateur scientifique dans la chaire d'Analyse et Simulation Numériques du professeur J. Rappaz à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.